SERIE : B

N° D'ORDRE : 34

N° DE SERIE : 33

THESE

présentée devant

L'UNIVERSITE DE RENNES

U. E. R. Structure et Propriétés de la Matière

pour obtenir

Le grade de Docteur Ingénieur

Spécialité : Électronique appliquée aux télécommunications

par

Louis GUILLOU

Ingénieur de l'École Centrale des Arts et Manufactures

Contribution à l'étude des doublets repliés. Etude du couplage ; applications.

Soutenue le 21 mars 1973 devant la Commission d'Examen

M. G. DUBOST	Professeur à l'Université de Rennes	Président
M. J. MEVEL	Professeur à l'Université de Rennes	Examinateur
M. C. BERGER	Ingénieur Principal de l'Armement	Examinateur
M. Le Docteur S. ZISLER	Ingénieur en Chef à la Thomson-C. S. F.	Examinateur

SÉRIE : B
N° D'ORDRE : 34
N° DE SÉRIE : 33

THESE

présentée devant

L'UNIVERSITE DE RENNES

U. E. R. Structure et Propriétés de la Matière

pour obtenir

Le grade de Docteur Ingénieur

Spécialité : Électronique appliquée aux télécommunications

par

Louis GUILLOU
Ingénieur de l'École Centrale des Arts et Manufactures

Contribution à l'étude des doublets repliés.
Etude du couplage ; applications.

Soutenue le 21 mars 1973 devant la Commission d'Examen

M. G. DUBOST	Professeur à l'Universite de Rennes	Président
M. J. MEVEL	Professeur à l'Université de Rennes	Examinateur
M. C. BERGER	Ingénieur Principal de l'Armement	Examinateur
M. Le Docteur S. ZISLER	Ingénieur en Chef à la Thomson-C. S .F.	Examinateur

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE DE RENNES

.....

U.E.R. issues de la FACULTE DES SCIENCES

.....

Doyens Honoraires

M. MILON Y.
M. TREHIN R.
M. SCHMITT M.
M. LE MOAL H.
M. MARTIN Y.
M. BOCLE J.

Professeurs Honoraires

M. FREYMANN R.
M. HAGENE P.
M. POISSON R.
M. ROHMER R.
M. TREHIN R.
M. SALMON-LEGAGNEUR F.
M. des ABBAYES H.
M. MILON Y.

Maîtres de Conférences Honoraires

M. GRILLET L.
M. LECRECQ A.

Mathématiques

Professeurs	Maîtres de Conférences & Chargés de Cours
Melle CHARPENTIER M.	M. LEGOUPIL J.
M. GUERINDON J.	M. HOUDEBINE J.
M. METIVIER M.	M. EUVRARD D.
M. GIORGIUTTI I.	M. NEDELEC J. C.
M. BRUNEL A.	M. VERJUS J. P.
M. TOUGERON J. C.	M. TRILLING L.
M. MIGNOT A.	M. FERRAND D.
	M. GUIVARC'H Y.
	M. KEANE M. (M. C. associé)
	M. GILDELAMADRID (Prof. associé)

Physique

M. VACHER M.
M. VIGNERON L.
M. LE BOT J.
Mme ROBIN née SALOMOND
M. ROBIN S.
M. LE MONTAGNER S.
M. MEVEL J. Y.
M. MEINNEL J.
M. REGENSTREIF E.
M. BRUN P.
M. LE ROUX E.
M. DUBOST
M. GUIDINI
M. HAEUSLER C.
M. ARQUES P. Y.
M. DECAMPS E.
M. NUSIMOVICI M. A.

Chimie

M. VENE J.
M. LE MOAL H.
M. LEVAS E.
M. PELTIER D.
M. PRIGENT J.
M. JOUAN P.
M. FOUCAUD A.
M. LANG J.
M. CARRIE R.
M. GUERILLOT C.
M. KERFANTO M.
M. DABARD R.
M. GRANDJEAN D.
M. LUCAS J.
M. DUVAL J.
M. MARTIN G.

Zoologie

M. RICHARD G.
M. MAILLET P.
M. BOISTEL J.
M. RAZET P.
M. FOLLIOT R.
M. ALLEGRET P
M. MANIEY J.
M. JOLY J.
M. POSTEL (Professeur associé)
M. LEFEUVRE J.C.

Botanique

M. VILLERET S.
M. CLAUSTRES G.
Melle GOAS M.
Melle GOAS G.
Mme LEMOINE C.
M. TOUFFET

Géologie

M. COGNE J.
Melle DURAND S.
M. PHILIPPOT A.
M. BOILLOT G.
M. HAMEURT J.

Le Secrétaire Général de l'Université

M. BOURDIGUEL R.

D'am zad ha d'am mamm

O mab

"Science is always wrong,

It never solves a problem without creating ten more"

George Bernard Shaw.

Ma profonde reconnaissance va à Monsieur le Professeur G. DUBOST qui m'a accueilli dans son laboratoire, pour les encouragements qu'il m'a sans cesse prodigués.

Je suis également reconnaissant à Monsieur le Professeur J. MEVEL pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à ce travail.

Que Monsieur C. BERGER, Ingénieur Principal de l'Armement, veuille trouver ici mes sincères remerciements.

J'exprime au Docteur S. ZISLER, Ingénieur en chef à la Thomson-C.S.F., ma profonde reconnaissance pour avoir bien voulu s'intéresser à cette étude.

Je tiens également à remercier Monsieur J.P. DANIEL et tous les chercheurs du laboratoire pour les discussions fructueuses et l'aide qu'ils m'ont apportée en toute occasion.

Messieurs FRIN, HAVOT, RAGOT et VALLEE ont également contribué à ce travail. Qu'ils soient ici remerciés de leur constant dévouement et félicités pour leur habileté.

Je tiens enfin à remercier Madame HALOPAU et Mademoiselle GRUEL pour le soin qu'elles ont apporté à la frappe de ce document.

SOMMAIRE.

Pages

LISTE DES SYMBOLES I

INTRODUCTION.

Chapitre I - METHODE DE CALCUL DE L'EQUATION INTEGRALE MISE AU POINT SUR LE DOUBLET CONVENTIONNEL DE LONGUEUR MOYENNE.

I.1 - EQUATION INTEGRALE DE HALLEN POUR UN DOUBLET ISOLE DANS L'ESPACE 1

I.1.1 - Equation et conditions de validité 1
I.1.2 - Ecriture en longueurs électriques et conditions aux limites 2

I.2 - METHODE DE LINEARISATION DE L'EQUATION INTEGRALE 4

I.2.1 - Définition des fonctions Ca, Sa et Ea 4
I.2.2 - Découpage et fonction d'approximation du courant 4
I.2.3 - Système linéaire relatif au doublet 7

I.3 - RELATIONS ENTRE LES COEFFICIENTS INDEPENDANTS DU COURANT ET LES GRANDEURS PHYSIQUES 10

I.3.1 - Distribution de courant 10
I.3.2 - Admittance 10
I.3.3 - Champ à grande distance 11

I.4 - COMPARAISON DE LA THEORIE ET DE L'EXPERIENCE POUR UN DOUBLET DE LONGUEUR MOYENNE ISOLE DANS L'ESPACE 14

I.4.1 - Admittance d'entrée d'un doublet de longueur moyenne 14
I.4.2 - Distribution de courant 16

I.5 - CONCLUSIONS RELATIVES A LA METHODE NUMERIQUE 17

Chapître II - DOUBLET REPLIE ET COUPLAGE ENTRE DOUBLETS REPLIES.

II.1- PRESENTATION DU DOUBLET REPLIE ET MISE EN EQUATIONS . . 18

II.1.1 - Modèles physiques et paramètres 18
II.1.2 - Modèle théorique adopté et conditions aux limites 19
II.1.3 - Système linéaire 20

Pages

II.2 - DECOMPOSITION DES COURANTS EN PARTIES SYMETRIQUES ET ANTISYMETRIQUES 23

II.2.1 - Définition des parties symétrique et antisymétrique des courants 23

II.2.2 - Contributions de I_S et I_A au diagramme de rayonnement dans le plan H d'un doublet replié 26

II.2.3 - Stabilité des calculs et comparaisons avec les mesures de Morita et Faflick. 28

II.3 - CALCULS SUR L'ADMITTANCE ET LOIS EMPIRIQUES DE CORRECTIONS 29

II.3.1 - Principe des corrections sur un doublet replié et méthode de calcul 29

II.3.2 - Expériences systématiques sur un lot de doublets repliés 31

II.3.3 - Généralisation et définition d'une fréquence réduite 32

II.3.4 - Calcul de lois empiriques de corrections . . . 32

II.4 - COUPLAGE ENTRE DEUX DEMI-DOUBLETS REPLIES 34

II.4.1 - Utilisation des corrections dans les calculs de couplage 34

II.4.2 - Couplage entre deux demi-doublets repliés au-dessus d'un plan conducteur 34

II.5 - CONCLUSIONS RELATIVES AU COUPLAGE ENTRE DOUBLETS REPLIES 37

Chapître III - APPLICATIONS DEGAGEES AU COURS DE L'ETUDE .

III.1- ANTENNE YAGI 38

III.1.1- Comparaisons de diagrammes expérimentaux et théoriques pour des antennes Yagi alimentées par un doublet conventionnel. 38

III.2- DOUBLET REPLIE A LARGE BANDE PASSANTE 39

III.2.1- Adaptation à large bande par un transformateur d'impédance. Etude du doublet replié disposé parallèlement au dessus d'un plan réflecteur . 40

III.2.2- Rayonnement d'un doublet replié symétrique immergé dans un diélectrique 44

CONCLUSION 46

Annexe I - EVALUATION DES FONCTIONS Ca(H,Z,A), Sa(H,Z,A) et Ea(H,Z,A) 47

Annexe II - EVALUATION DES FONCTIONS $C_b(X,\theta)$, $S_b(X,\theta)$ et $F_b(X,\theta)$. 53

Annexe III - CALCUL DES CORRECTIONS COMPLEXES LINEAIRES EN FONCTION DE LA FREQUENCE 56

Annexe IV - APPROXIMATION D'UNE SURFACE CONNUE EN NP POINTS $\{z_i\}$ PAR UN POLYNOME A DEUX VARIABLES ET DE DEGRE ND : $P_{ND}(x, y)$. 58

BIBLIOGRAPHIE 62

LISTE DES SYMBOLES

k_o	constante de propagation en espace libre
$\zeta_o = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}}$	impédance caractéristique du vide
F	fréquence
λ	longueur d'onde
λ_o	longueur d'onde en espace libre
$\mathcal{G}(z,z',a)$	noyau exact de l'intégrale de HALLEN
$G(z,z',a)$	noyau approché de l'intégrale ; fonction de Green
$\mathcal{H}(x)$	fonction de Heaviside
2 h	hauteur du doublet
a	rayon du doublet
c	rayon du brin parasite du doublet replié
b	distance entre les brins du doublet replié
z	abscisse le long du doublet
$H = k_o h$; $A = k_o a$; $B = k_o b$; $C = k_o c$; $Z = k_o z$	longueurs électriques
V_o	tension d'alimentation
$V_{inc} = \frac{\vec{E}_{inc} \cdot \vec{z}}{k_o}$	champ incident : $\vec{E}_{inc}$ $\vec{z}$: vecteur unitaire parallèle au doublet
C_o ; C_1 ; C_2	constantes d'intégration définies par les conditions aux limites.
T_i ; D_i ; K_i	coefficients du courant
n	nombre de découpages

$I(Z)$ distribution de courant portée par le doublet

$\Phi(Z)$ distribution de potentiel portée par le doublet

X_i bornes des intervalles de découpage

$J_i(Z)$ fonction décrivant le courant sur l'intervalle $\left[X_{i-1}, X_i\right]$

Z_j points d'indentification de l'équation intégrale

$Ca(X,Z,A)$; $Sa(X,Z,A)$; $Ea(X,Z,A)$; $Fa(X,Z,A)$ fonctions apparaissant dans la linéarisation des intégrales (Annexe I)

$Cb(X,Z,A)$; $Sb(X,Z,A)$; $Eb(X,Z,A)$; $Fb(X,Z,A)$ fonctions apparaissant dans le calcul des champs (Annexe II)

$MAT(A,H,n)$ matrice carrée d'ordre (n+3) obtenue par la linéarisation d'une intégrale de la forme : $\int_{-H}^{+H} G(Z,Z',A).I(Z').dZ'$

r, θ, ϕ coordonnées sphériques

$J(\theta)$ intégrale de champ d'un doublet

$\Omega = 2 \text{ Log } (\frac{2h}{a})$ coefficient rendant compte de l'épaisseur d'un doublet

d correction de hauteur

d_o correction optimale

A_1 et B_1 coefficients de correction de l'admittance : $\Delta Y = A_1.F + B_1$

R.O.S. rapport d'ondes stationnaires

λ_M longueur d'onde maximale de fonctionnement d'un doublet.

INTRODUCTION.-

Les études du doublet replié ("folded dipole") sont déjà anciennes |[13]| |[26]| |[12]|. Ces auteurs considèrent que l'excitation du doublet replié est équivalente à la superposition de deux modes (symétrique et dissymétrique).

Ils définissent l'impédance du mode symétrique comme celle d'un doublet cylindrique classique équivalent. L'impédance du mode dissymétrique est celle de la ligne bifilaire de transmission du doublet replié. Finalement, l'impédance d'entrée de l'antenne s'exprime facilement en fonction des deux impédances de ces deux modes.

Cette théorie simplifiée revient à considérer que la ligne bifilaire de transmission effectue une transformation de l'impédance de rayonnement qui correspond au mode symétrique. Cette dernière est basée sur une équivalence avec l'impédance de rayonnement d'un doublet traditionnel.

Plus récemment, un auteur |[10]| étudie par la même théorie l'effet des paramètres physiques sur la bande passante de doublets repliés. L'auteur indique que l'on obtient, pour une impédance d'antenne toujours élevée, une bande passante large en utilisant un brin replié de gros diamètre séparé par une grande distance du brin alimenté.

Initialement notre étude avait pour but l'étude du couplage entre doublets repliés pour leur éventuelle utilisation dans une antenne log-périodique. L'étude théorique de ce couplage nous a permis de trouver, en particulier, l'impédance de rayonnement et la bande passante d'un doublet replié en fonction de ses paramètres géométriques. Une comparaison de la théorie proposée avec les résultats expérimentaux obtenus sur un grand nombre de maquettes nous a permis de définir des lois empiriques de corrections, valables dans de très nombreux cas.

Des applications intéressantes ont été trouvées pour des doublets repliés ayant des dimensions tout à fait inhabituelles.

Chapitre I

METHODE DE CALCUL DE L'EQUATION INTEGRALE MISE AU POINT SUR LE DOUBLET CONVENTIONNEL DE LONGUEUR MOYENNE

I.1 - EQUATION INTEGRALE DE HALLEN POUR UN DOUBLET ISOLE DANS L'ESPACE.-

I.1.1 - Equation et conditions de validité.-

Pour un doublet symétrique de hauteur 2h et de rayon a, alimenté symétriquement en espace libre et plongé dans un champ incident $\vec{E}_{inc}$, l'équation de Hallen s'écrit |17|,|19|,|32| :

$$\int_{-h}^{+h} \mathcal{G}(z,z',a).I(z').dz' = - j \frac{4\pi}{\zeta_o} \left[\frac{V_o}{2} \sin k_o|z| + V_{inc} \right] - C_o \cos k_o z$$

$\zeta_o = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}} = 120\ \pi$ ohms est l'impédance caractéristique du vide.

k_o est la constante de propagation en espace libre

C_o est une constante déterminée par les conditions aux limites.

$V_{inc} = \frac{\vec{E}_{inc} \cdot \vec{z}}{k_o}$ $\left\{ \begin{array}{ll} \vec{E}_{inc} & : \text{ champ électrique incident.} \\ \vec{z} & : \text{ vecteur unitaire parallèle au doublet.} \end{array} \right.$

L'alimentation est considérée comme une coupure du potentiel scalaire Φ (z) au milieu du doublet symétrique :

$$V_o = \Phi(0^+) - \Phi(0^-)$$

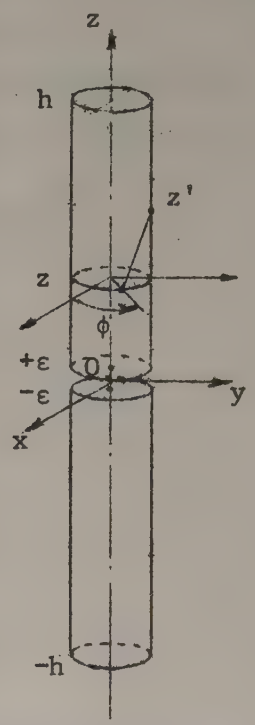
Une telle alimentation nous affranchit du couplage entre la ligne d'alimentation et le doublet. Cependant, en raison de cette discontinuité du potentiel, le courant I (z), solution de l'équation intégrale est la somme du courant d'antenne I_a(z) et d'un courant de charge I_g(z) infini à la coupure du potentiel z = 0 |32|. La contribution de ce courant I_g(z) au courant I(z) solution de l'équation intégrale n'est significative que sur une courte distance de l'ordre de $\delta_c = h\, e^{-1/k_o a}$ autour du point d'alimentation |19|.

$k_o a = 0,1$ soit $\frac{a}{\lambda} = 0,0159$ $\qquad \frac{\delta_c}{h} = 4,5 \times 10^{-5}$

$k_o a = 0,5$ soit $\frac{a}{\lambda} = 0,0795$ $\qquad \frac{\delta_c}{h} = 0,14$

si $k_o a$ est petit ($k_o a < 0,1$) le courant de charge $I_g(z)$ croît depuis une valeur négligeable pour $z = \delta_c$ jusqu'à l'infini, pour $z = 0$, sur une distance si faible qu'il n'apparaît pas dans I(z) pour des valeurs faibles du nombre de découpage dans la méthode numérique exposée par la suite.

Le doublet doit de plus être suffisamment mince ($h \gg a$) de façon à pouvoir remplacer la densité de courant à la surface du conducteur par un courant axial. Dans le calcul du potentiel vecteur à la surface du conducteur, nous remplaçons donc le noyau exact de l'intégrale par le noyau réduit G [19]



$$\mathcal{G}(z,z',a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{-jk_o D(z,z',a,\phi)}}{D(z,z',a,\phi)}\, d\phi$$

avec : $D(z,z',a,\phi) = \sqrt{(z-z')^2 + 4a^2\sin^2\frac{\phi}{2}}$

$$G(z,z',a) = \frac{e^{-jk_o\sqrt{(z-z')^2 + a^2}}}{\sqrt{(z-z')^2 + a^2}}$$

L'équation de Hallen avec un noyau réduit s'écrit donc pour $a \ll h$ et $a \ll 0,1\ \lambda$:

$$\int_{-h}^{+h} \frac{e^{-jk_o\sqrt{(z-z')^2 + a^2}}}{\sqrt{(z-z')^2 + a^2}}\, I(z').dz' + C_o \cos k_o z = -j\frac{4\pi}{\zeta_o}\left(\frac{V_o}{2}\sin k_o|z| + V_{inc}\right)$$

I.1.2 - Ecriture en longueurs électriques et conditions aux limites.-

La résolution de l'équation intégrale se faisant à une fréquence donnée, nous allons simplifier l'écriture en n'utilisant plus que des longueurs électriques exprimées en radians :

Soit : $H = k_o h$; $A = k_o a$; $Z = k_o z$; $Z' = k_o z'$

Nous écrivons donc pour $A \ll H$ et $A \ll 1$

$$\int_{-H}^{+H} \frac{e^{-j\sqrt{(Z-Z')^2 + A^2}}}{\sqrt{(Z-Z')^2 + A^2}} \cdot I(Z').dZ' + C_o \cos Z = -j \frac{4\pi}{\zeta_o}\left(\frac{V_o}{2} \sin|Z| + V_{inc}\right)$$

Si nous travaillons à l'émission ($V_{inc} = 0$), le potentiel V_o sera une donnée du problème. Nous complétons l'équation intégrale par l'annulation du courant au bout du doublet :

$$I(H) = 0$$

Si nous travaillons à la réception, V_{inc} est imposé. Il nous faut connaître Z_L impédance de charge de l'antenne. Nous complétons alors l'équation intégrale par les deux conditions :

$$I(H) = 0$$

$$I(0).\ Z_L + V_o = 0$$

Avant d'aborder la méthode de résolution du système d'équations constitué de l'équation intégrale de Hallen et des conditions aux limites, rappelons que nous avons déjà fait un certain nombre d'approximations pour l'obtenir. Il est en effet choquant de constater que si le premier membre de l'équation intégrale a une dérivée continue pour $Z = 0$, la dérivée du second membre présente une discontinuité de première espèce en ce point. Le problème ne sera donc pas de chercher à résoudre exactement le système d'équations, mais de chercher à obtenir une solution rendant correctement compte du problème physique posé.

I.2 - METHODE DE LINEARISATION DE L'EQUATION INTEGRALE.-

I.2.1 - Définition des fonctions Ca, Sa et Ea.-

Reprenons très brièvement une méthode dûe à KING |17| pour mettre au point les différentes fonctions qui nous seront utiles par la suite.

Approximons le courant par une fonction paire :

$$I(Z) = T \cos Z + D \sin |Z| + K$$

En portant cette expression dans l'intégrale, nous la linéarisons :

$$\int_{-H}^{+H} G(A,Z,Z').I(Z').dZ' = T.Ca\ (H,Z,A) + D.Sa\ (H,Z,A) + K.Ea(H,Z,A)$$

avec :

$$\begin{cases} Ca\ (X,Z,A) = \int_{-X}^{X} G(Z,Z',A).\ \cos Z'.dZ' \\ Sa\ (X,Z,A) = \int_{-X}^{X} G(Z,Z',A).\ \sin |Z'|.\ dZ' \\ Ea\ (X,Z,A) = \int_{-X}^{X} G(Z,Z'A).\ dZ' \end{cases}$$

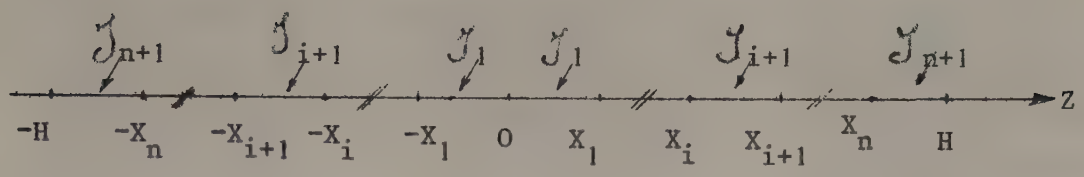
Ces trois fonctions, nous les avons calculées en annexe I, les transformations pour passer aux sinus et cosinus intégraux étant assez compliquées.

I.2.2 - Découpage et fonction d'approximation du courant.-

Cette méthode de KING n'est valable que pour des doublets courts, aussi avons-nous envisagé d'introduire un découpage de l'intervalle [O,H] de façon à pouvoir traiter théoriquement des doublets de n'importe quelle longueur électrique. En fait la méthode imaginée est valable pour des doublets de longueur moyenne. Car la méthode des quatre termes |5| ne va pas au delà de h = 1,5 λ et pour les doublets longs (h > 5 λ), il vaut mieux utiliser des méthodes telles que celle de WU |18|,|32|.

L'intervalle [O,H] est découpé en n + 1 intervalles de longueur $\frac{H}{n+1}$. n sera appelé nombre de découpage. Sur chaque intervalle de la forme $]X_{i-1}, X_i[$ le courant est décrit par une fonction paire $\mathcal{J}_i(Z)$ telle que :

$$\mathcal{J}_i(Z) = T_i . \cos(Z) + D_i . \sin(|Z|) + K_i$$



avec $X_o = 0$ et $X_i = \frac{i}{n+1} H$, $i \in \{1, 2 \ldots n\}$

Si nous utilisons la fonction de Heaviside définie par :

$$\mathcal{H}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Alors nous pouvons écrire le courant sous la forme :

$$I(Z) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathcal{J}_i(Z) . \{\mathcal{H}(X_i - |Z|) - \mathcal{H}(X_{i-1} - |Z|)\}$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$I(Z) = \sum_{i=1}^{n} \left[\mathcal{J}_i(Z) - \mathcal{J}_{i+1}(Z)\right] . \mathcal{H}(X_i - |Z|) + \mathcal{J}_{n+1}(Z) . \mathcal{H}(H - |Z|)$$

Nous allons imposer à I(Z) et à I'(Z) d'être continues aux points limites d'intervalle : $X_i = \frac{i}{n+1} .H$ (i entier compris entre 1 et n).

La fonction I(Z) étant paire, les propriétés de continuité imposées sur le segment [0,H] seront évidemment vérifiées sur le segment [-H,0]

$$\mathcal{J}_i(X_i) - \mathcal{J}_{i+1}(X_i) = 0 \rightarrow [T_i - T_{i+1},\ D_i - D_{i+1},\ K_i - K_{i+1}] . \begin{vmatrix} \cos X_i \\ \sin X_i \\ 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}_i}{\partial Z}(X_i) - \frac{\partial \mathcal{J}_{i+1}}{\partial Z}(X_i) = 0 \rightarrow [T_i - T_{i+1},\ D_i - D_{i+1},\ K_i - K_{i+1}] . \begin{vmatrix} -\sin X_i \\ \cos X_i \\ 0 \end{vmatrix} = 0$$

donc : le vecteur $\begin{bmatrix} T_i - T_{i+1} \\ D_i - D_{i+1} \\ K_i - K_{i+1} \end{bmatrix}$ est parallèle à : $\begin{bmatrix} \cos X_i \\ \sin X_i \\ 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -\sin X_i \\ \cos X_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos X_i \\ -\sin X_i \\ 1 \end{bmatrix}$

Les conditions de continuité sur le courant s'écrivent donc :

$$\begin{bmatrix} T_i - T_{i+1} \\ D_i - D_{i+1} \\ K_i - K_{i+1} \end{bmatrix} = [K_i - K_{i+1}] . \begin{bmatrix} -\cos X_i \\ -\sin X_i \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{pour } i \in \{1,2 \ldots n\}$$

soit encore : $\mathcal{J}_i(Z) - \mathcal{J}_{i+1}(Z) = (K_i - K_{i+1}).(1 - \cos Z \cos X_i - \sin|Z| . \sin X_i)$

Finalement, la fonction d'approximation du courant est :

$$I(Z) = \sum_{i=1}^{n} (K_i - K_{i+1}).(1 - \cos Z.\cos X_i - \sin|Z| . \sin X_i).\mathcal{H}(X_i - |Z|)$$

$$+ [T_{n+1}, D_{n+1}, K_{n+1}] . \begin{bmatrix} \cos Z \\ \sin|Z| \\ 1 \end{bmatrix} . \mathcal{H}(H - |Z|)$$

Il ne reste donc que n+3 coefficients indépendants pour le courant. Nous les appellerons coefficients indépendants du courant.

L'équation intégrale va donc s'écrire : (à l'émission, $V_{inc} = 0$)

$$(K_1 - K_2).[Ea(X_1,Z,A) - \cos X_1 . Ca(X_1,Z,A) - \sin X_1 . Sa(X_1,Z,A)]$$

$$+ \text{----------}$$

$$+ (K_n - K_{n+1}).[Ea(X_n,Z,A) - \cos X_n . Ca(X_n,Z,A) - \sin X_n . Sa(X_n,Z,A)]$$

$$+ T_{n+1} . Ca(H,Z,A) + D_{n+1} . Sa(H,Z,A) + K_{n+1} . Ea(H.Z,A)$$

$$= -j \frac{2\pi}{\zeta_o} V_o \sin|Z| - C_o \cos Z$$

Nous introduisons ici une nouvelle fonction Fa(X ,Z,A) telle que :

$$Fa(X,Z,A) = Ea(X,Z,A) - \cos X . Ca(X,Z,A) - \sin X . Sa(X,Z,A)$$

Nous allons être en mesure maintenant d'écrire le système linéaire permettant de calculer les coefficients indépendants du courant, à savoir $K_i - K_{i+1}$, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ et T_{n+1}, D_{n+1}, K_{n+1}.

I.2.3 - Système linéaire relatif au doublet.-

Nous nous intéressons au doublet isolé parce que c'est un bon moyen pour mettre au point les différents outils de calculs qui nous permettront de linéariser les intégrales apparaissant dans des problèmes plus compliqués, tels que le doublet replié et le couplage entre doublets repliés.

Pour en revenir au doublet isolé, il nous faut écrire l'équation intégrale en n + 3 points Z_j pour pouvoir résoudre le problème.

Nous avons choisi d'identifier l'équation intégrale à la base, au milieu de chaque intervalle et au sommet du doublet.

Soit $Z_j \in \{ 0, \frac{X_1}{2}, \frac{X_1+X_2}{2}, \ldots \frac{X_n+H}{2}, H \}$

D'autre part, nous savons déjà que : $X_i = \frac{i.H}{n+1}$

En utilisant les fonctions Ca, Sa, Ea et Fa précédemment définies, nous allons pouvoir définir une matrice carrée que nous appellerons MAT(A, H, n). Cette matrice carrée, de dimensions (n + 3) × (n + 3) n'est fonction que de A, H et n ; nous avons élaboré un sous-programme permettant de calculer directement une telle matrice. Or dans les problèmes de couplage qui apparaîtront par la suite, les intégrales se présenteront toujours sous la même forme, donc notre sous-programme servira à traiter aussi ces intégrales.

Ecrivons cette matrice :

$$MAT(A,H,n)=\begin{bmatrix} Fa(X_1;Z_1;A) & Fa(X_2;Z_1;A) \ldots Fa(X_n;Z_1;A) & Ca(H,Z_1,A) & Sa(H,Z_1,A) & Ea(H,Z_1,A) \\ Fa(X_1;Z_2;A) & Fa(X_2;Z_2;A) \ldots Fa(X_n;Z_2;A) & Ca(H,Z_2,A) & Sa(H,Z_2,A) & Ea(H,Z_2,A) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Fa(X_1;Z_{n+3};A) & \ldots\ldots\ldots Fa(X_n;Z_{n+3};A) & Ca(H,Z_{n+3},A) & Sa(H,Z_{n+3},A) & Ea(H,Z_{n+3},A) \end{bmatrix}$$

La condition aux limites I(H) = 0 va s'écrire :

$$T_{n+1} \cos H + D_{n+1} \sin H + K_{n+1} = 0$$

A l'émission, nous obtenons donc :

$$\left[\begin{array}{c|c} \multicolumn{1}{c|}{\multirow{2}{*}{MAT(A,H,n)}} & \begin{matrix}\cos Z_1\\ \cos Z_2\\ \vdots\\ \cos Z_{n+3}\end{matrix} \\ \cline{2-2} 0 \text{ ——— } 0 \;\; \cos H \;\; \sin H \;\; 1 \;\; 0 & \end{array}\right] * \begin{bmatrix} K_1-K_2\\ K_2-K_3\\ \vdots\\ K_n-K_{n+1}\\ T_{n+1}\\ D_{n+1}\\ K_{n+1}\\ C_o \end{bmatrix} = -j\frac{2\pi V_o}{\zeta_o} \begin{bmatrix} \sin Z_1\\ \sin Z_2\\ \vdots\\ \sin Z_{n+3}\\ 0 \end{bmatrix}$$

A la réception, le doublet étant refermé sur une charge Z_L, nous obtenons :

$$I(o) + \frac{V_o}{Z_L} = 0$$

Or :

$$I(o)=\left[T_1;D_1;K_1\right].\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \left[(\overrightarrow{TDK}_1-\overrightarrow{TDK}_2)+(\overrightarrow{TDK}_2-\overrightarrow{TDK}_3)+\ldots+\overrightarrow{TDK}_{n+1}\right].\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

D'où :

$$I(o) = \left[(1-\cos X_1);(1-\cos X_2);\ldots.(1-\cos X_n);1;0;1\right].\begin{bmatrix} K_1-K_2\\ K_2-K_3\\ \vdots\\ K_n-K_{n+1}\\ T_n+1\\ D_{n+1}\\ K_{n+1}\end{bmatrix}$$

Introduisons le coefficient $\alpha = \begin{cases} -j\dfrac{\zeta_o}{2\pi.Z_L} & \text{si l'antenne est fermée sur } Z_L \\ 0 & \text{si l'antenne est en circuit ouvert.}\end{cases}$

Le système linéaire relatif à un doublet fonctionnant à la réception sera donc :

$$
\begin{bmatrix}
 & & & & \\
 & MAT(A,H,n) & & & \\
 & & & & \\
\hline
0 \text{ ——— } 0 & \cos H & \sin H & 1 & \\
(1-\cos X_1)..(1-\cos X_n) & 1 & 0 & 1 &
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\cos Z_1 & \sin Z_1 \\
\cos Z_2 & \sin Z_2 \\
\vdots & \vdots \\
\cos Z_{n+3} & \sin Z_{n+3} \\
0 & 0 \\
0 & \alpha
\end{bmatrix}
*
\begin{bmatrix}
K_1-K_2 \\
K_2-K_3 \\
\vdots \\
K_n-K_{n+1} \\
T_{n+1} \\
D_{n+1} \\
K_{n+1} \\
C_o \\
j\frac{2\pi}{\zeta_o}V_o
\end{bmatrix}
= -j\frac{4\pi}{\zeta_o}\frac{E_{inc}}{k_o}
\begin{bmatrix}
1 \\
\vdots \\
1 \\
0 \\
0
\end{bmatrix}
$$

Nous sommes donc en mesure de déterminer les coefficients indépendants du courant à savoir (K_1-K_2),... (K_n-K_{n+1}), T_{n+1}, D_{n+1}, K_{n+1}.

I.3 - RELATIONS ENTRE LES COEFFICIENTS INDEPENDANTS DU COURANT ET LES GRANDEURS PHYSIQUES.-

Il nous faut maintenant relier ces coefficients aux grandeurs physiques que sont la distribution de courant, l'admittance, le champ à grande distance et les diagrammes de rayonnement. Tout ceci nous sert à mettre au point sur des cas très simples une technique numérique utilisée ensuite dans les cas plus compliqués du doublet replié, du couplage entre doublets repliés, des réseaux de doublets repliés.

I.3.1 - Distribution de courant.-

En pratique, le nombre de points où l'on veut connaître le courant est très supérieur au nombre de découpage. Nous allons donc progresser pas à pas depuis le sommet jusqu'à la base du doublet.

A chaque pas, nous comparons l'abscisse avec les limites d'intervalle, et à chaque franchissement de frontière X_i, nous changeons de détermination du courant grâce à la récurrence :

$$\begin{cases} T_i = T_{i+1} - (K_i - K_{i+1}) \cos X_i \\ D_i = D_{i+1} - (K_i - K_{i+1}) \sin X_i \\ K_i = K_{i+1} + (K_i - K_{i+1}) \end{cases}$$

I.3.2 - Admittance.-

L'admittance en mmhos s'exprime par le même nombre que le courant à la base du doublet en mA à condition d'appliquer une tension d'alimentation de 1 volt.

Or :

$$I(o)=\overrightarrow{TDK}_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[(\overrightarrow{TDK}_1-\overrightarrow{TDK}_2)+(\overrightarrow{TDK}_2-\overrightarrow{TDK}_3)+\ldots+\overrightarrow{TDK}_{n+1}\right] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ou encore :

$$I(o) = \left[(1-\cos X_1);(1-\cos X_2);\ldots(1-\cos X_n);1;0;1\right] * \begin{bmatrix} K_1-K_2 \\ K_2-K_3 \\ \ldots\ldots \\ K_n-K_{n+1} \\ T_{n+1} \\ D_{n+1} \\ K_{n+1} \end{bmatrix}$$

I.3.3 - Champ à grande distance.-

Nous allons exprimer le champ élémentaire créé à grande distance par un élément linéaire de hauteur totale 2h placé en (x, y) en fonction des coefficients indépendants du courant qui le parcourt. Cette partie nous sera utile pourcalculer les diagrammes de rayonnement des réseaux que nous seront amenés à rencontrer.

Le champ électrique, en coordonnées sphériques, n'aura qu'une seule composante E_θ .

$$E_\theta(r,\theta,\phi) = j\,\frac{\omega\mu_o}{4\pi}\,.\,\frac{e^{-jk_o r}}{r}.e^{jk_o \sin\theta(x\cos\phi+y\sin\phi)}.\sin\theta.\int_{-h}^{+h} I(z').e^{jk_o z'\cos\theta}\,dz'$$

Utilisons les longueurs électriques pour écrire cette relation et négligeons les facteurs multiplicatifs, représentés par K :

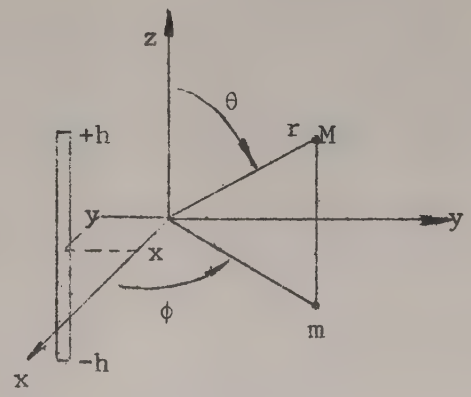
$$E_\theta(\theta,\phi)=K.\ e^{j\sin\theta(X\cos\phi+Y\sin\phi)}\,.\,\frac{\sin\theta}{2}\,.\int_{-H}^{+H} I(Z').e^{jZ'\cos\theta}\,.\,dZ'$$

Dans le plan H ($\theta = \frac{\pi}{2}$), on obtient :

$$E_\theta(\phi)=K.\ e^{j(X\cos\phi+Y\sin\phi)}\,.\frac{1}{2}\int_{-H}^{+H} I(Z').dZ'$$

Dans le plan E (ϕ= O si le pointé de l'antenne (maximum de puissance) est l'axe Ox , on obtient :

$$E_\theta(\theta)=K.e^{jX\sin\theta}\,.\frac{\sin\theta}{2}.\int_{-H}^{+H} I(Z').e^{jZ'\cos\theta}dZ'$$



Nous séparons le facteur d'espace et l'intégrale de champ en les définissant par :

* *facteur d'espace* $\begin{cases} \text{dans le plan H : } e^{j(X\cos\phi + Y\sin\phi)} \\ \text{dans le plan E : } e^{jX\sin\theta} \end{cases}$

* *intégrale de champ* : $J(\theta) = \frac{\sin\theta}{2} \int_{-H}^{+H} I(Z').e^{jZ'\cos\theta}.\, dZ'$

Comme la fonction décrivant le courant est paire, on peut aussi écrire :

$$J(\theta) = \sin\theta \,.\int_0^H I(Z').\cos(Z'\cos\theta).dZ'$$

Il nous faut maintenant exprimer l'intégrale de champ en fonction des coefficients du courant. Le courant étant une combinaison des fonctions cos Z, sin |Z| et 1, nous allons voir apparaître des fonctions :

$$\begin{cases} C_b(X,\theta) = \sin\theta \,.\int_0^X \cos Z'.\, \cos(Z'\,\cos\theta)dZ' \\ S_b(X,\theta) = \sin\theta \,.\int_0^X \sin Z'.\, \cos(Z'\,\cos\theta)dZ' \\ E_b(X,\theta) = \sin\theta \,.\int_0^X \cos(Z'\,\cos\theta)dZ'. \end{cases}$$

Nous utiliserons aussi une fonction composée des précédentes :

$$F_b(X,\theta) = E_b(X,\theta) - \cos X.\, C_b(X,\theta) - \sin X.\, S_b(X,\theta)$$

Ces quatre fonctions, nous les avons calculées en annexe II. Nous pouvons donc écrire $J(\theta)$ sous la forme :

$$J(\theta) = F_b(X_1,\theta).(K_1-K_2) + F_b(X_2,\theta).(K_2-K_3) + \ldots + F_b(X_n,\theta).\,(K_n - K_{n+1})$$

$$+ C_b(H,\theta).T_{n+1} + S_b(H,\theta).\,D_{n+1} + E_b(H,\theta).K_{n+1}$$

Dans le plan H, nous obtenons une écriture particulièrement simple :

$$J(\tfrac{\pi}{2}) = \{(X_1 - \sin X_1) \ldots\ldots\ldots ; (X_n - \sin X_n) ; (\sin H) ; (1-\cos H) ; (H)\} * \begin{bmatrix} K_1 - K_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ K_n - K_{n+1} \\ T_{n+1} \\ D_{n+1} \\ K_{n+1} \end{bmatrix}$$

Une telle décomposition pour un doublet du champ rayonné à grande distance est particulièrement bien adaptée au calcul des diagrammes de réseau d'éléments linéaires parallèles. Dans de tels réseaux, les champs lointains rayonnés par chaque élément sont parallèles, et il suffit d'en faire la somme algébrique pour obtenir le champ résultant.

Nous avons mis au point ce calcul dans un programme permettant de traiter des réseaux du type Yagi dans lesquels l'élément alimenté peut être un doublet classique ou un doublet replié.

A partir du champ rayonné, il est facile d'obtenir le diagramme normalisé en puissance ou donné en décibels. Puis à partir de cela, nous pouvons calculer les ouvertures à 3 dB ainsi que la directivité.

I.4 - COMPARAISON DE LA THEORIE ET DE L'EXPERIENCE POUR UN DOUBLET DE LONGUEUR MOYENNE ISOLE DANS L'ESPACE.

La comparaison entre la mesure de l'admittance d'entrée d'un demi-doublet au dessus d'un plan conducteur et le calcul effectif pour différents nombres n de découpages vont nous permettre de mieux comprendre la méthode numérique que nous avons imaginée.

Ce que nous nous attacherons à mettre en évidence, c'est la valeur de la méthode pour calculer des doublets plus longs que ceux qu'il nous est possible de calculer par les autres méthodes. D'autre part, en définissant un nombre de découpage minimum nécessaire, nous avons réalisé un gain appréciable sur le temps de calcul et un gain encore plus intéressant de place en mémoire centrale d'ordinateur par rapport aux autres méthodes utilisées au laboratoire.

I.4.1 - Admittance d'entrée d'un doublet de longueur moyenne.-

Nous avons étudié un demi-doublet défini par h = 381 mm et a = 1,5 mm placé au dessus d'un plan parfaitement conducteur de forme carrée, de deux mètres de côté. Nous avons fait varier la fréquence de 0,15 à 4 GHz. h/λ varie donc sensiblement de 0,19 à 5.

Ce demi-doublet est relativement fin puisque le rapport $\frac{2h}{a}$ est voisin de 500 et que le paramètre $\Omega = 2 \text{ Log}_e \left(\frac{2h}{a}\right)$ vaut 12,5.

Nous respectons bien les conditions de validité définies au paragraphe I.1.1 à savoir : $a \ll h$ et $a \ll 0{,}1\ \lambda$, en effet $k_o a$ varie de 5×10^{-3} à 0,13.

Sur les figures I a, I c, I e, nous avons représenté à la fois les mesures et les calculs de la conductance d'un doublet en fonction de la fréquence.

Sur les figures I b, I d et I f, nous avons fait la même chose pour la susceptance.

Nous constatons que les résultats des calculs restent groupés quand n

est supérieur à une certaine valeur dépendant de la fréquence.

En observant les figures I a, I c et I e, nous pouvons dresser le tableau suivant précisant les fréquences à partir desquelles les courbes théoriques de la conductance s'écartent des expérimentales pour chaque nombre de découpage n.

n	0	1	2	3	4	5
f_{Max}(GHz)	0,60	1	1,4	2,24	3,70	>4

En observant de la même manière les figures I b, I d et I f se rapportant à la susceptance, nous pouvons écrire :

n	0	1	2	3	4	5
f_{Max}(GHz)	0,60	0,95	1,75	2,2	3,3	3,8

Ces deux séries d'observation nous permettent de choisir le nombre de découpage minima nécessaire.

Si nous n'avons pas prolongé notre étude au delà de $H = 11\ \pi = \frac{2\pi h}{\lambda}$ c'est parce que pour des antennes plus longues, il vaut mieux utiliser la méthode de T.T. WU [18] [32] mieux adaptée à ces cas là.

Une autre observation que nous pouvons faire à l'examen des courbes I a à I f précédentes est que le calcul pour un nombre de découpage n devient manifestement aberrant pour $\frac{h}{\lambda} = n + 1$. Ceci est évident en se rapportant à la formulation des conditions aux limites d'une part et à l'expression de la fonction décrivant le courant d'autre part.

I.4.2 - Distribution de courant.

Nous nous contenterons de présenter un seul exemple de courant, et nous nous en servirons pour montrer l'influence néfaste que peut présenter l'utilisation d'un nombre de découpage excessif.

TERRET [22] a mesuré le module et la phase du courant le long d'un doublet défini par h = 150 mm et a = 3,5 mm, soit $\frac{2h}{a} \simeq 86$ et $\Omega \simeq 8,9$, à F = 1 GHz, soit $\frac{h}{\lambda} = 0,5$.

Sur la figure II-a nous avons porté les résultats des mesures et les calculs pour les nombres de découpage n = 0, 1, 2 et 7.

Dans ce cas, un nombre de découpage excessif (n = 7) donne une allure de courant mauvaise (phase en particulier) près de l'alimentation. Ce phénomène est apparu pour plusieurs autres cas que nous ne présentons pas ici. L'instabilité du calcul de courant, au voisinage de l'alimentation, se traduit par une conductance relativement stable et une susceptance qui ne cesse de croître avec le nombre de découpage (figure II b).

I.5 - CONCLUSIONS RELATIVES A LA METHODE NUMERIQUE.-

Le fait d'augmenter inconsidérément le nombre de découpage à partir du nombre de découpage minima nécessaire conserve la forme générale du courant sauf au voisinage du point d'alimentation, et par conséquent donne des valeurs erronées pour la susceptance d'entrée.

Rappelons à ce sujet que dans l'équation intégrale, la dérivée du second membre présente une discontinuité de première espèce pour $z = 0$ alors que la dérivée du premier membre est continue. L'équation intégrale n'a donc pas de solution au sens mathématique. Une méthode numérique de résolution doit donc correspondre à une approximation, non pas à une recherche d'une solution exacte qui n'existe pas.

Notre méthode, grâce à la définition d'un nombre de découpage minimum nécessaire, permet d'adapter l'approximation au cas étudié. Elle nous permet de plus de réaliser un gain de temps de calcul appréciable et un gain encore plus intéressant de place en mémoire centrale d'ordinateur, par rapport aux autres méthodes appliquées au doublet de longueur moyenne.

Cette méthode nous permet d'étendre les possibilités de calcul actuellement utilisées au laboratoire. A titre de référence, citons la méthode des quatre termes [5] qui permet d'atteindre des rapports $\frac{h}{\lambda}$ de l'ordre de 1,6 à 1,7. Cette méthode est très comparable à notre méthode pour $n = 2$ pour ce qui est du temps de calcul, de l'encombrement des mémoires d'ordinateur et des résultats fournis.

Chapitre II

DOUBLET REPLIE ET COUPLAGE ENTRE DOUBLETS REPLIES

II.1 - PRESENTATION DU DOUBLET REPLIE ET MISE EN EQUATIONS.-

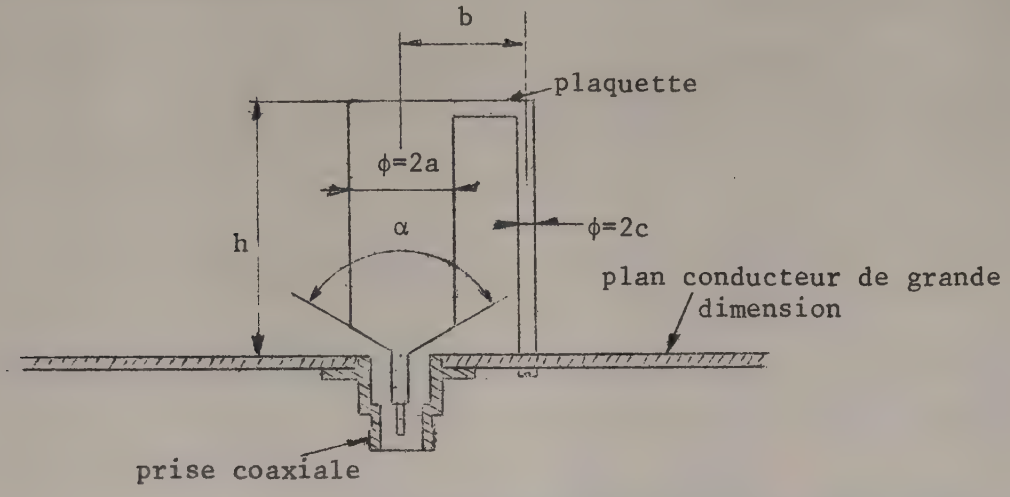
II.1.1 - Modèles physiques et paramètres.-

Nous avons étudié deux genres d'éléments rayonnants :

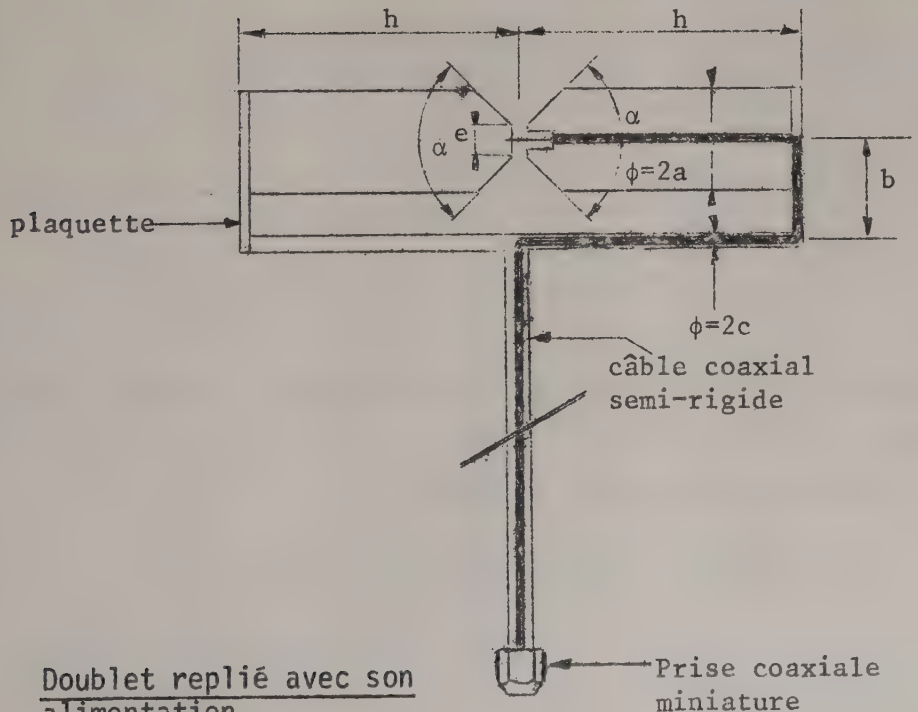
- des demi-doublets repliés, appelés à fonctionner au dessus d'un plan parfaitement conducteur ;

- des doublets repliés alimentés à partir d'une ligne coaxiale passant à l'intérieur de la structure rayonnante.

Les différents paramètres définissant la structure sont indiqués sur les schémas suivants :



Demi-doublet replié avec son alimentation.



Doublet replié avec son alimentation.

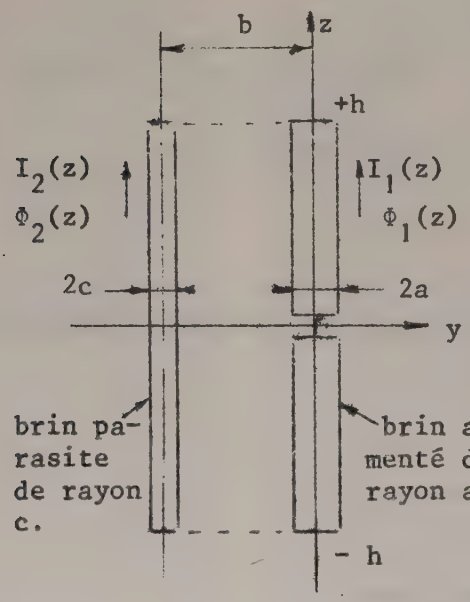
II.1.2 - Modèle théorique adopté et conditions aux limites.-

Nous avons adopté un modèle théorique simple de ces structures. Deux facteurs ont été négligés, à savoir : (voir figures du paragraphe précédent)

- *L'influence de la plaquette réunissant les deux brins.* Cette plaquette interagit sur les brins au voisinage du sommet. Dans la pratique, la plaquette est courte devant la longueur d'onde et reste inférieure à 0,1 λ_M (λ_M correspondant à la fréquence la plus basse de fonctionnement).

- *L'influence de la configuration de la zone d'alimentation.* Cependant, cette configuration définie par l'angle α, la distance et le diamètre des surfaces en regard fixe la capacité existant en parallèle sur l'impédance de rayonnement. Le calcul de correction donné plus loin sera valable pour un angle α donné.

Nous considérons que les courants sont axiaux sur chaque brin et que les distributions de potentiel scalaire sont sinusoïdales.



Les courants sont des fonctions paires de z :

courant sur le brin alimenté : $I_1(-z) = I_1(z)$

courant sur le brin parasite : $I_2(-z) = I_2(z)$

Les potentiels sont des fonctions impaires de z :

potentiel scalaire sur le brin alimenté : $\Phi_1(-z) = -\Phi_1(z)$

potentiel scalaire sur le brin parasite : $\Phi_2(-z) = -\Phi_2(z)$

D'autre part : $\Phi_1(0^+) = -\Phi_1(0^-) = \frac{V_o}{2}$

Les conditions aux limites que nous appliquons se traduisent par les conditions suivantes :

. Pas d'accumulation de charge au sommet :

$$I_1(h) + I_2(h) = 0$$

. Le rayonnement de la plaquette et son interaction sur les courants au voisinage du sommet est négligé :

$$\Phi_1(h) = \Phi_2(h)$$

Notre modèle théorique sera donc défini par seulement quatre paramètres : h, b, a, c (voir figure précédente).

II.1.3 - Système linéaire.

On peut écrire en tenant compte du couplage entre les deux brins les équations régissant le modèle théorique.

$$\begin{cases} \int_{-H}^{+H} G(A,Z,Z').I_1(Z')dZ' + \int_{-H}^{+H} G(B,Z,Z').I_2(Z')dZ' = -\frac{2\pi}{\zeta_o} V_o \sin|Z| - C_1 \cos Z \\ \int_{-H}^{+H} G(B,Z,Z').I_1(Z')dZ' + \int_{-H}^{+H} G(C,Z,Z').I_2(Z')dZ' = -C_2 \cos Z \end{cases}$$

complétées par :

$$I_1(H) + I_2(H) = 0 \qquad \text{et} \qquad \phi_1(H) = \phi_2(H)$$

avec $H = k\,h$; $B = k\,b$; $A = k\,a$; $C = k\,c$; $Z = k\,z$; $Z' = k\,z'$

et $$G(A,Z,Z') = \frac{e^{-j\sqrt{A^2+(Z-Z')^2}}}{\sqrt{A^2+(Z-Z')^2}}$$

La condition de continuité du potentiel vecteur au sommet va nous permettre de simplifier un peu le système.

$$\begin{cases} \Phi_1(z > 0) = C'_1 \sin k\,z + \frac{V_o}{2} \cos k\,z \\ \Phi_2(z > 0) = C'_2 \sin k\,z \end{cases}$$

soit $\Phi_1(H) = \Phi_2(H) \longleftrightarrow C'_1 \sin H + \frac{V_o}{2} \cos H = C'_2 \sin H$

pour $H \neq p.\,\pi$, on obtient :

$$C'_1 = -\frac{V_o}{2} \frac{\cos H}{\sin H} + C'_2$$

Soit :

$$\Phi_1(Z > 0) = C'_2 \sin Z + \frac{V_o}{2}\left(\frac{-\cos H \sin Z + \sin H \cos Z}{\sin H}\right) = C'_2 \sin Z + \frac{V_o}{2} \cdot \frac{\sin(H-Z)}{\sin H}$$

Nous obtenons donc finalement :

$$\begin{cases} \Phi_1(Z > 0) = C'_2 \sin Z + \dfrac{V_o}{2} \dfrac{\sin(H-Z)}{\sin H} \\ \Phi_2(Z > 0) = C'_2 \sin Z \end{cases}$$

ou encore le second membre de la première équation peut s'écrire :

$$-j \frac{2\pi}{\zeta_o} V_o \sin|Z| - C_1 \cos Z = - C_2 \cos Z - j \frac{2\pi}{\zeta_o} V_o \frac{\cos(H-|Z|)}{\sin H}$$

Il ne nous reste donc qu'une seule constante d'intégration.

Le système linéaire que nous utiliserons sera donc :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-H}^{+H} G(A,Z,Z')\, I_1(Z')dZ' + \int_{-H}^{+H} G(B,Z,Z').I_2(Z').dZ' + C_o \cos Z = -j \frac{2\pi}{\zeta_o} V_o \frac{\cos(H-|Z|)}{\sin H} \\ \displaystyle\int_{-H}^{+H} G(B,Z,Z')\, I_1(Z')dZ' + \int_{-H}^{+H} G(C,Z,Z').I_2(Z').dZ' + C_o \cos Z = 0 \\ I_1(H) + I_2(H) = 0 \end{cases}$$

Nous linéarisons les quatre intégrales grâce aux sous-programmes mis au point dans la première partie (cf. I.2.3). En reprenant les notations de cette première partie, nous obtenons pour un doublet replié fonctionnant à l'émission , le système donné page suivante.

Nous avons un système analogue lorsque le doublet replié fonctionne à la réception et est plongé dans un champ $\vec{E}_{inc}$. Une condition supplémentaire reliera V_o à la charge présentée par le système de réception.

$$
\begin{bmatrix}
\text{MAT}(A,H) & \text{MAT}(B,H) & \cos Z_1 \\
 & & \vdots \\
 & & \cos Z_{n+3} \\
\text{MAT}(B,H) & \text{MAT}(C,H) & \cos Z_1 \\
 & & \vdots \\
 & & \cos Z_{n+3} \\
 & & 0 \\
0 \text{ —— } 0\cos H \sin H\ 1 & 0\text{—}\ 0 \cos H \sin H\ 1 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
K_{1,1} - K_{1,2} \\
\vdots \\
K_{1,n} - K_{1,n+1} \\
T_{1,n+1} \\
D_{1,n+1} \\
K_{1,n+1} \\
\hline
K_{2,1} - K_{2,2} \\
\vdots \\
K_{2,n} - K_{2,n+1} \\
T_{2,n+1} \\
D_{2,n+1} \\
K_{2,n+1} \\
\hline
C_o
\end{bmatrix}
= -j \frac{2\pi V_o}{\zeta_o \sin H}
\begin{bmatrix}
\cos(Z_1 - H) \\
\cos(Z_2 - H) \\
\vdots \\
\cos(Z_{n+3} - H) \\
0 \\
\vdots \\
0
\end{bmatrix}
= -j \frac{2\pi V_o}{\zeta_o \sin H}
\begin{bmatrix}
\cos Z_{n+3} \\
\cos Z_{n+2} \\
\vdots \\
\cos Z_2 \\
\cos Z_1 \\
0 \\
\vdots \\
0
\end{bmatrix}
$$

II.2 - DECOMPOSITION DES COURANTS EN PARTIES SYMETRIQUES ET ANTISYMETRIQUES.-

Cette idée n'est pas nouvelle et nous l'avons trouvée dans un ouvrage de KING |[16]| et dans un article de MORITA |[26]|. Elle n'est possible que dans le cas où les rayons des deux brins sont égaux. Néanmoins, nous avons repris une partie de ces calculs en les approfondissant car ils vont nous permettre de mieux cerner les problèmes physiques et numériques liés au fonctionnement du doublet replié.

II.2.1 - Définition des parties symétrique et antisymétrique des courants.-

Reprenons les équations établies au § II.1.3 :

$$\begin{cases} \int_{-H}^{+H} G(A,Z,Z').I_1(Z').dZ' + \int_{-H}^{+H} G(B,Z,Z').I_2(Z').dZ' + C_o \cos Z = -j\frac{2\pi}{\zeta_o} V_o \frac{\cos(H-|Z|)}{\sin H} \\ \int_{-H}^{+H} G(B,Z,Z').I_2(Z').dZ' + \int_{-H}^{+H} G(C,Z,Z').I_2(Z').dZ' + C_o \cos Z = 0 \\ I_1(H) + I_2(H) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_S = I_1 + I_2 \text{ est la partie symétrique des courants,} \\ I_A = I_1 - I_2 \text{ est la partie antisymétrique des courants.} \end{cases}$$

Ceci nous permet d'écrire :

$$\begin{cases} \int_{-H}^{+H} [G(A,Z,Z')+G(B,Z,Z')].\frac{I_S(Z')}{2} dZ' + \int_{-H}^{+H} [G(A,Z,Z')-G(B,Z,Z')]\frac{I_A(Z')}{2} dZ' + C_o \cos Z \\ \quad = -j\frac{2\pi}{\zeta_o} V_o \frac{\cos(H-|Z|)}{\sin H} \\ \int_{-H}^{+H} [G(C,Z,Z')+G(B,Z,Z')].\frac{I_S(Z')}{2} dZ' - \int_{-H}^{+H} [G(C,Z,Z')-G(B,Z,Z')]\frac{I_A(Z')}{2} dZ' + C_o \cos Z = 0 \end{cases}$$

La différence et la somme de ces deux équations nous permettent d'écrire respectivement :

$$\int_{-H}^{+H}\left[\frac{G(A,Z,Z')-G(C,Z,Z')}{2}\right] I_S(Z')dZ' + \int_{-H}^{+H}\left[\frac{G(A,Z,Z')+G(C,Z,Z')}{2} - G(B,Z,Z')\right].I_A(Z').dZ'$$

$$= -j\,\frac{2\pi}{\zeta_o}\,V_o\,\frac{\cos(H-|Z|)}{\sin H}$$

et

$$\int_{-H}^{+H}\left[\frac{G(A,Z,Z')+G(C,Z,Z')}{2} + G(B,Z,Z')\right] I_S(Z')dZ' + \int_{-H}^{+H}\left[\frac{G(A,Z,Z')-G(C,Z,Z')}{2}\right]..$$

$$.. I_A(Z').dZ' + 2\,C_o.\cos Z = -j\,\frac{2\pi}{\zeta_o}\,V_o\,\frac{\cos(H-|Z|)}{\sin H}$$

Ceci est complété par $I_S(H) = 0$.

Les deux équations intégrales restent couplées dans le cas général. Par contre, si les rayons sont égaux, nous obtenons une décomposition du système :

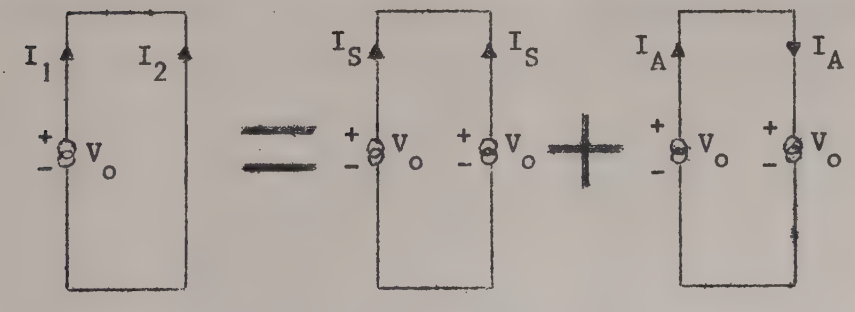
$$\int_{-H}^{+H}\left[G(A,Z,Z')-G(B,Z,Z')\right].\left[I_1(Z')-I_2(Z')\right].dZ' = -j\,\frac{2\pi}{\zeta_o}\,V_o\,\frac{\cos(H-|Z|)}{\sin H}$$

$$\int_{-H}^{+H}\left[G(A,Z,Z')+G(B,Z,Z')\right].\left[I_1(Z')+I_2(Z')\right].dZ' + 2C_o\cos Z = -j\,\frac{2\pi}{\zeta_o}\,V_o\,\frac{\cos(H-|Z|)}{\sin H}$$

$$I_1(H) + I_2(H) = 0$$

Nous décomposons ainsi notre système de départ en deux systèmes indépendants régissant respectivement la somme et la différence des courants sur les brins, dans le cas où les rayons sont égaux.

Cette décomposition est facile à saisir d'un point de vue physique. Nous pouvons la schématiser par :



Les équations régissant chaque système peuvent s'obtenir directement :

$$(1)\begin{cases}\displaystyle\int_{-H}^{+H}[G(A,Z,Z')+G(B,Z,Z')].I_S(Z').dZ'+C'\cos Z = -j\,\frac{2\pi}{\zeta_o}V_o\sin|Z| \\ I_S(H) = 0\end{cases}$$

La continuité du potentiel est systématiquement vérifiée en raison des symétries :

$$(2)\begin{cases}\displaystyle\int_{-H}^{+H}[G(A,Z,Z')-G(B,Z,Z')].\ I_A(Z').dZ' + C''\cos Z = -j\,\frac{2\pi}{\zeta_o}V_o\sin|Z| \\ \phi(H) = 0\end{cases}$$

La non accumulation de charges au sommet est systématiquement vérifiée en raison des symétries.

Ces deux dernières équations peuvent s'écrire plus simplement :

$$(2')\quad \int_{-H}^{+H}\Big[G(A,Z,Z')-G(B,Z,Z')\Big].I_A(Z').dZ' = -j\,\frac{2\pi}{\zeta_o}V_o\,\frac{\cos(H-|Z|)}{\sin H}$$

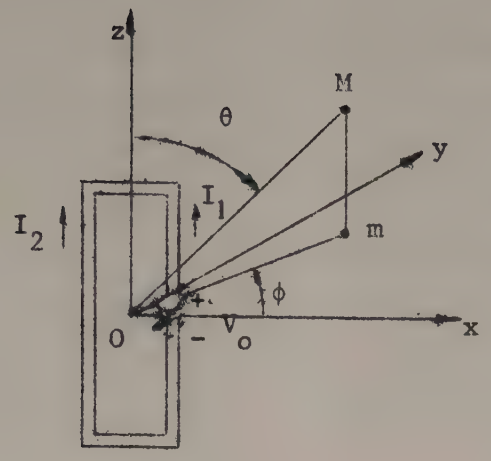
On a donc bien retrouvé les équations régissant le doublet replié.

REMARQUE. -

I_S, partie symétrique du courant, correspond au fonctionnement d'une antenne, c'est lui qui fournira la quasi totalité du rayonnement lointain.

I_A, partie antisymétrique du courant, correspond au fonctionnement d'une ligne bifilaire court-circuitée en bout. Ce courant ne participera que faiblement au rayonnement lointain. Nous allons nous en rendre compte en regardant de plus près le diagramme dans le plan H d'un doublet replié.

II.2.2 - Contributions de I_S et I_A au diagramme de rayonnement dans le plan H d'un doublet replié.-



La figure ci-contre nous indique les conventions choisies pour le calcul des champs et des diagrammes de rayonnement.

Le plan H, perpendiculaire aux brins du doublet replié, est défini par $\theta=\pi/2$. D'où nous tirons une expression du champ dans le plan H : (voir § I.3.3 où $X = \pm \frac{b}{2}$ et $Y = 0$).

$$E_\theta(\phi) = K\, e^{j\frac{B}{2}\cos\phi} \int_{-H}^{+H} I_1(Z').dZ' + Ke^{-j\frac{B}{2}\cos\phi} \int_{-H}^{+H} I_2(Z').dZ'$$

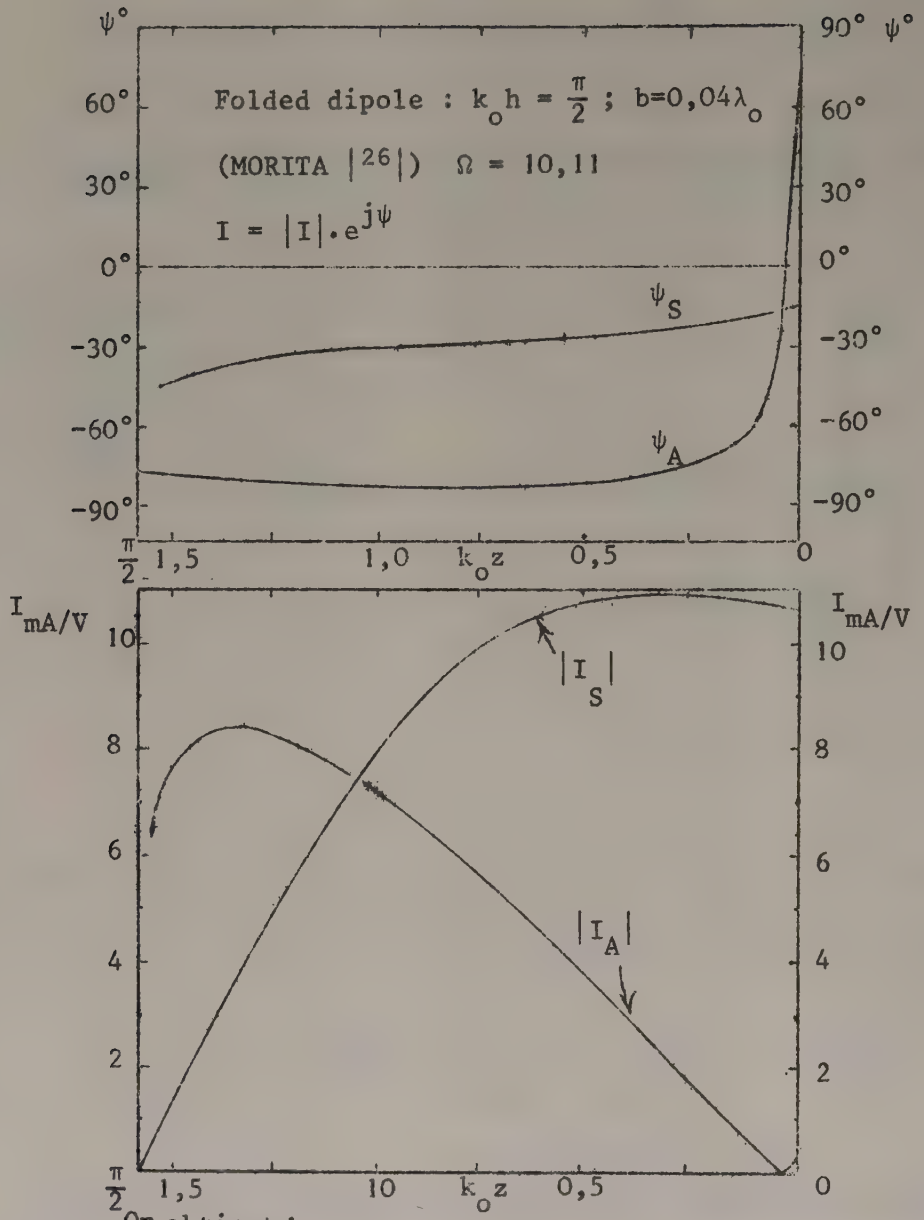
En faisant apparaître les parties symétrique et antisymétrique des courants, nous obtenons donc :

$$E_\theta(\phi) = K\cos\left(\frac{B}{2}\cos\phi\right) \int_{-H}^{+H} I_S(Z')dZ' + j\sin\left(\frac{B}{2}\cos\phi\right) \int_{-H}^{+H} I_A(Z').dZ'$$

Nous allons faire une application numérique simple grâce aux courbes relevées par MORITA [26].

En toute première approximation, nous pouvons écrire, d'après les résultats de la figure page suivante :

$$\begin{cases} I_S(mA) = 11 \cos Z.\ e^{-j\ 20^\circ} \\ I_A(mA) = 8{,}5 \sin Z.e^{-j\ 80^\circ} \end{cases}$$



On obtient :

$$\begin{cases} \int_{-H}^{+H} I_S(Z')dZ' = e^{-j\,20^\circ} . 22 \\ \int_{-H}^{+H} I_A(Z').dZ' = e^{-j\,80^\circ} . 17 \end{cases}$$

Il s'ensuit que E est proportionnel à : $22\cos(\frac{B}{2}\cos\phi)e^{-j20^\circ} + j17\sin(\frac{B}{2}\cos\phi)e^{-j80^\circ}$.

On déduit aisément que le champ correspondant à $\phi=\pi$ est plus faible de 1,4 dB que le rayonnement correspondant à $\phi=0$.

S'il n'y avait que le courant symétrique, les champs seraient alors égaux pour ces deux directions. Cet ordre de grandeur a été vérifié sur les mesures de diagrammes. L'influence du courant antisymétrique sur le diagramme de rayonnement n'est donc pas absolument négligeable, c'est un phénomène du second ordre. Cela nous fait mieux comprendre le fonctionnement du doublet replié.

II.2.3 - Stabilité des calculs et comparaisons avec les mesures de MORITA et FAFLICK.-

Un programme de calcul nous a permis de dessiner directement sur un traceur de courbe BENSON associé à un ordinateur, les distributions de courants calculées sur un doublet replié.

Nous avons appliqué cela au doublet replié étudié par MORITA et FAFLICK [26] et défini par :

$k_o h = H = \frac{\pi}{2}$ à une fréquence nominale de 1 GHz, cela donnerait :

$b = 0{,}04\ \lambda_o$ par exemple : h = 75 mm

a = c = 0,961 mm

et $\Omega = 10{,}11$ et b = 12 mm

Nous présentons d'abord (fig.III-a) les parties symétrique et antisymétrique des courants en modules normalisés au maximum de la partie symétrique et en phases reportées directement. Sur ces figures, le nombre de découpages n varie de zéro à dix.

Nous avons présenté ensuite la comparaison entre les courbes de MORITA et FAFLICK et nos calculs (fig. III-b).

Nous constatons de suite que la partie symétrique du courant est stable quand le nombre de découpage varie de 0 à 10. Le courant symétrique est bien représenté et correspond aux mesures réalisées par MORITA [26].

Par contre, le module de la partie antisymétrique du courant en fonction du nombre de découpage est très instable et montre que l'on a intérêt à prendre un nombre minima de découpages (n=0 est suffisant, compte tenu des résultats du paragraphe I.4.1). La loi du courant antisymétrique correspond au fonctionnement d'une ligne bifilaire court-circuitée. Les résultats obtenus avec notre méthode sont suffisants à condition de faire intervenir quelques corrections empiriques pour tenir compte de l'influence du court-circuit du doublet replié et de la zone d'alimentation.

Ce sont ces corrections empiriques qui vont faire l'objet du paragraphe suivant.

II.3 - CALCULS SUR L'ADMITTANCE ET LOIS EMPIRIQUES DE CORRECTIONS.-

Nous avons vu au § II.1 qu'un certain nombre de paramètres secondaires ont été négligés au cours de l'élaboration du modèle théorique et de la mise en équation. Les corrections que nous allons calculer vont tenter d'en tenir compte pour permettre ensuite un calcul correct du couplage entre doublets repliés.

II.3.1 - Principe des corrections sur un doublet replié et méthode de calcul.-

La présence de la plaquette assurant la liaison entre les deux brins se traduit par un décalage des maximas sur les courbes d'admittance en fonction de la fréquence.Comme ces décalages sont du second ordre, on peut aussi les interpréter comme un allongement fictif des brins rayonnants.

La forme du brin rayonnant au voisinage de l'alimentation joue un rôle très important sur l'admittance mesurée. Il se traduit par une capacité parasite facile à mettre en évidence, mais très difficile à prendre en considération dans les calculs.

A partir de ces considérations, nous avons pensé introduire une double correction dans les calculs :

1. une correction sur la hauteur que nous appellerons d pour tenir compte de l'influence du court-circuit,

2. une correction sur l'admittance calculée, linéaire en fonction de la fréquence F, que nous appellerons ΔY et telle que :

$$\Delta Y = A_1 . F + B_1$$

Cette dernière correction est valable pour une configuration donnée de la zone d'alimentation (angle α et distance entre brins).

Il nous faut un critère de choix de façon à lier ces divers coefficients et à les optimiser ensemble. Pour un doublet replié, nous possédons NF points d'observations de l'admittance expérimentale $Y_m(i)$ à des fréquences F(i).

Pour une correction de longueur d donnée et un nombre de découpage donné, nous calculons les admittances $Y_c(i)$ correspondantes. Nous définissons une grandeur réelle σ caractérisant l'écart existant entre les courbes d'admittances corrigées par ΔY et les mesures expérimentales $Y_m(i)$ en fonction de la fréquence.

$$\sigma = \sum_{i=1}^{NF} [\{Y_c(i) + A_1 . F(i) + B_1 - Y_m(i)\}.\{(Y_c(i) + A_1 . F(i) + B_1 - Y_m(i)\}^*]$$

La norme utilisée est la norme hermitienne et le signe * indique que l'on prend le complexe conjugué du nombre indiqué.

A_1 et B_1 sont les coefficients complexes qui minimisent σ. On reconnaît là une méthode assez analogue à la recherche d'une droite des moindres carrés.

Cependant, nous travaillons ici sur des nombres complexes, aussi avons-nous développé ces calculs en annexe III.

Donc à un d donné nous savons associé une valeur de σ. Nous dirons que la valeur optimale de d est celle qui minimise σ.

Nous présentons un calcul de corrections sur le doublet replié défini par : h = 75 mm b = 18 mm a = 4,5 mm et c = 1,5 mm. (Voir fig. V).

Nous avons fourni en données à l'ordinateur 17 valeurs expérimentales d'admittances ainsi que les fréquences correspondantes (0,6 ; 0,65 ; 0,7 ; 0,75 ; 0,8 ; 0,85 ; 0,9 ; 0,95 ; 1 ; 1,05 ; 1,10 ; 1,15 ; 1,2 ; 1,3 ; 1,4 ; 1,5 ; 1,6 GHz).

A partir de ces données le programme que nous avons réalisé nous permet de chercher la valeur de σ minimum pour une valeur de d donnée donc de rechercher ensuite la valeur de d correspondant au mini-minimorum. Nous montrons les variations de σ en fonction de d pour trois nombres de découpage. Ces courbes ont des allures paraboliques. De plus A_1 et B_1 varient quasi linéairement en fonction de d. Donc même en possédant une loi empirique assez approximative sur les valeurs des d optimums, fonction des paramètres géométriques des doublets et du nombre de découplages, nous arriverons à obtenir des corrections satisfaisantes en remplaçant A_1 et B_1 par leur droite de variation en fonction de d. Sur la figure V, F_o représente la fréquence centrale de la bande passante du doublet replié.

II.3.2 - Expériences systématiques sur un lot de doublets repliés.-

Nous avons déjà vu qu'un doublet replié se caractérise par quatre paramètres : h la hauteur, a et c les rayons des brins et b l'entraxe. Nous avons fixé $\alpha = 120°$, mais cet angle n'apparaît pas directement dans les calculs. Donc les lois empiriques de corrections seront valables uniquement pour cet angle et pour des conditions d'alimentation données.

Evidemment, une homothétie sur les dimensions géométriques se traduit par une homothétie de rapport inverse sur les fréquences. Or, on étudie le doublet replié autour d'une fréquence nominale telle que $h = \frac{\lambda_o}{4}$. Il ne nous reste donc en fait seulement trois paramètres indépendants que nous pouvons exprimer en fonction de λ_o. C'est a, b et c.

D'autre part, nos études tant théoriques qu'expérimentales tendent à montrer que l'entraxe ne joue pas un rôle déterminant sur l'allure des courbes d'admittance, du moment qu'il ne devient pas trop grand (en pratique, on a:b < 0,1 λ_o).

Aussi, pour nos expériences systématiques, nous avons fixé h à 75 mm et b à 18 mm, la fréquence nominale est donc 1 GHz et notre plage de fréquence ira de 0,6 à 1,6 GHz.

Nous n'avons donc conservé que deux paramètres variables a et c, les rayons des deux brins. Ces deux paramètres sont soumis à la contrainte évidente : a + c < b = 18 mm.

Nous avons représenté sur un plan (fig. IV-a) en fonction des rayons a et c la courbe d'impédance de rayonnement de quelques-unes des 54 maquettes réalisées et testées (fig. IV-b). Ce sont des demi-doublets repliés disposés au-dessus d'un plan réflecteur de grandes dimensions.

Pour chaque maquette, nous procédons comme nous l'avons décrit au § précédent. Nous calculons donc la valeur de d qui minimise σ et de plus, nous calculons les droites représentant les variations de A_1 et B_1 en fonction de d autour de l'optimum (fig. V).

Avant de s'avancer davantage, nous allons généraliser un peu ces corrections : si nous passons de la fréquence nominale F_o à une autre fréquence nominale $F'_o = \frac{1}{\tau} F_o$, nous multiplierons tous les paramètres géométriques par τ. Les résultats de l'expérience sont pratiquement conservés et les calculs sont identiques aux précédents.

II.3.3 - Généralisation et définition d'une fréquence réduite.-

La fréquence nominale de nos expériences systématiques est F_o = 1 GHz et nous avons donc : h = 0,25 λ_o et b = 0,06 λ_o. Les rayons a et c varient de 0,005 λ_o à 0,04 λ_o.

La plage de fréquences se situe entre 0,6 et 1,6 GHz. Aussi, nous avons défini une fréquence réduite f telle que :

$$f = \frac{F-F_o}{F+F_o} \quad \text{soit} \quad \frac{F}{F_o} = \frac{1+f}{1-f}$$

f varie donc de -0,25 à +0,23.

La correction sur l'admittance va pouvoir s'écrire :

$$\Delta Y = A_1 . F + B_1 = \frac{(A_1F_o+B)+f.(A_1F_o-B_1)}{1-f}$$

Les calculs nous ont fourni les droites représentant les variations de $A_1F_o+B_1$ et $A_1F_o-B_1$ en fonction de d (fig. V).

II.3.4 - Calcul de lois empiriques de corrections.-

Nous possédons donc à ce point pour chacune des 54 maquettes testées par nos soins et pour trois nombres de découpages (0, 1 et 2) :

. une correction optimale d_o/λ_o,

. quatre coefficients réels représentant la pente et l'abscisse à l'origine des parties réelle et imaginaire de $A_1F_o+B_1$ en fonction de d/λ_o,

. quatre coefficients réels représentant la pente et l'abscisse à l'origine des parties réelle et imaginaire de $A_1F_o-B_1$ en fonction de d/λ_o.

Pour un nombre de découpage donné, le problème consiste à approximer chacun des neuf coefficients précédents par un polynôme de degré ND à deux variables (a et c rayons des brins rayonnants). On utilise pour définir un polynôme de degré donné ND la méthode des moindres carrés appliquée aux 54 valeurs d'un coefficient en fonction des rayons des brins.

Nous avons élaboré un programme Fortran pour résoudre ce genre de problème. Les calculs sont développés en annexe IV où l'on définit une somme d'écarts-type s. Au vu des courbes de la figure VI, représentant les variations de s pour chaque coefficient, en fonction du degré du polynôme d'approximation ND, nous avons choisi :

ND = 3 pour les corrections de longueurs d_o

ND = 2 pour les autres coefficients.

La seule justification de notre choix réside dans le fait que les résultats obtenus sont corrects. On peut comparer sur la figure IV-a les valeurs théoriques et expérimentales.

Les corrections restent toujours du second ordre, sauf quand le rayon du brin alimenté tend à devenir trop important.

Nous donnons ensuite quelques valeurs de d_o, A_1 et B_1 pour n = 0 de façon à avoir les ordres de grandeur de ces coefficients :

d_o en mm

2c (mm) \ 2a (mm)	3	6	12	24
24	3,8			
12	5,3	5,8		
6	4,4	3,9	4,3	
3	5,0	3,9	3,7	4,6

A_1 en mmhos. GHz^{-1}

2c (mm) \ 2a (mm)	3	6	12	24
24	0,05-j 0,01			
12	0,20-j 0,68	0,69+j 0,07		
6	0,26-j 0,62	0,31+j 0,22	1,02+j 2,12	
3	0,32-j 0,62	0,38+j 0,62	0,70+j 1,42	2,30+j 3,20

B_1 en mmhos

2c (mm) \ 2a (mm)	3	6	12	24
24	0,04-j 0,06			
12	-0,15+j 0,69	-0,64+j 0,56		
6	-0,22+j 0,64	-0,24+j 0,48	-0,89-j 0,52	
3	-0,30+j 0,48	-0,38-j 0,21	-0,52-j 0,35	-1,40-j 2,57

Quand au principe des corrections lui-même, il va se justifier par les mesures de couplage que nous avons comparées avec les calculs corrigés. Cela fait l'objet du § suivant.

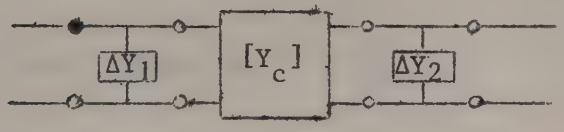
II.4 - COUPLAGE ENTRE DEUX DEMI-DOUBLETS REPLIES.-

II.4.1 - Utilisation des corrections dans les calculs de couplage.-

La correction sur la hauteur est de nature très différente de la correction sur l'admittance.

Sur un doublet replié, nous calculons les courants en tenant compte de d, puis nous corrigeons l'admittance Y_c par ΔY.

Deux doublets repliés couplés peuvent se représenter par une matrice admittance. Le calcul ne tenant compte que des corrections de hauteur d nous fournira la matrice $[Y_c]$, puis entre les bornes du quadripôle nous mettrons en parallèle des admittances de correction tenant compte des conditions d'alimentation.

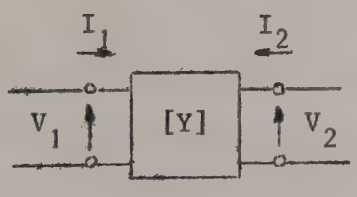


soit $[Y] = \begin{bmatrix} \Delta Y_1 + Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & \Delta Y_2 + Y_{22} \end{bmatrix}$

Remarquons que le quadripôle est passif, donc $Y_{12} = Y_{21}$.

II.4.2 - Couplage entre deux demi-doublets repliés au-dessus d'un plan conducteur.-

Nous pouvons représenter deux demi-doublets repliés, identiques, couplés, par une matrice admittance qui n'a que deux éléments différents.



$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_p & Y_c \\ Y_c & Y_p \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} Y_p.V_1 + Y_c.V_2 = I_1 \\ Y_c.V_1 + Y_p.V_2 = I_2 \end{cases}$$

Pour faire les calculs, nous allons prendre comme condition d'alimentation :

V_1 = 1 Volt à la base d'un des doublets repliés,

V_2 = 0 le second doublet replié est court-circuité.

Dans ce cas,

Y_p, l'admittance propre va s'exprimer par le même chiffre que le courant en ampères à la base du doublet replié alimenté.

Y_c, l'admittance de couplage va s'exprimer pour le même chiffre que le courant en ampères à la base du doublet replié court-circuité.

Nous avons placé les demi-doublets repliés séparés par la distance ℓ suivant le schéma ci-dessous :

Les deux demi-doublets repliés identiques que nous avons utilisés pour notre expérimentation se définissent par :

a = 2,5 mm ; b = 18 mm ; c = 1,5 mm ; h = 75 mm.

La fréquence centrale d'étude sera donc f_o = 1 GHz, soit λ_o = 300 mm et notre balayage en fréquence s'étendra de 0,6 à 1,6 GHz.

Nous présentons d'abord l'admittance d'un demi-doublet isolé mesurée respectivement à l'aide d'un réflectomètre et d'un mesureur de paramètres en "S". (Voir fig. VII).

Le réflectomètre donne une courbe plus régulière que le mesureur de paramètres en "S" qui est nécessaire pour les mesures de couplage. S'il est intéressant de comparer les deux manipulations, il est encore plus intéressant de comparer les courbes corrigées obtenues à partir des deux expériences, car elles sont pratiquement confondues. Le calcul des corrections n'est donc pas sensible au matériel utilisé pour les manipulations et de plus atténue les imprécisions du paramétreur en "S".

La correction $\Delta Y = A_1.F + B_1$ n'a pas joué un grand rôle si ce n'est de corriger la susceptance de 0,5 mmhos vers les hautes fréquences de la bande. Cela est normal si l'on songe au fait que le brin alimenté est relativement mince. Nous obtenons $h/a = \frac{75}{2,5} = 30$, donc $\Omega = 2\ \mathrm{Log}(\frac{2h}{a}) \simeq 8,2$.

Nous avons ensuite mesuré les impédances propre et de couplage à l'aide du mesureur de paramètres en "S" pour différents écartements entre les demi-doublets ℓ = 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120 et 195 mm. $\frac{\ell}{\lambda_o}$ varie donc de 0,05 à 0,65.

Nous donnons les admittances propres et de couplage pour les écartements ℓ_1 = 1,5 cm et ℓ_2 = 6 cm sur la figure VII-b. Chaque admittance est représentée en module et en phase.

Sur les courbes d'admittance propre et de couplage, nous voyons que la correction sur la hauteur est beaucoup plus importante que la correction supplémentaire relative à la zone d'alimentation $\Delta Y = A_1.F + B_1$. Le brin alimenté étant relativement mince ($h/a = 30$; $\Omega \simeq 8,2$), la zone d'alimentation est peu perturbée.

II.5 - CONCLUSIONS RELATIVES AU COUPLAGE ENTRE DOUBLETS REPLIES.-

La correction supplémentaire $\Delta Y = A_1.F + B_1$ est utile pour étendre la théorie vers des rayons plus importants de brin alimenté. La limite de validité de la théorie corrigée se situe aux environs de a = 6 mm dans la série d'expériences systématiques.

Ceci nous donne $h/a = \frac{75}{6} \simeq 12,5$ et donc $\Omega \simeq 5$.

En effet, pour $a \lesssim 6$ mm, nous obtenons $\sigma \lesssim 2$ mmhos^2.

Or :

$$\sigma = \sum_{i=1}^{17} \left| \left[Y_{\text{corrigé}}(i) - Y_{\text{mesuré}}(i) \right] \right|^2 = \sum_{i=1}^{17} \left| \delta Y_i \right|^2$$

Ceci nous donne :

$$\left| \delta Y \right|_{\text{moyen}} = \sqrt{\frac{2}{17}} = 0,33 \text{ mmhos}$$

D'autre part, nous n'avons pas exploré le couplage entre doublets repliés pour des valeurs de $\frac{\ell}{\lambda_o}$ plus importantes. En effet, comme le couplage est bien calculé pour des valeurs faibles de $\frac{\ell}{\lambda_o}$, ce qui n'était pas évident à priori étant donné les erreurs sur le courant antisymétrique (voir II.3.2), le couplage sera évidemment bon pour des valeurs de $\frac{\ell}{\lambda_o}$ plus importantes quand n'interviendra plus que le courant symétrique.

La théorie du couplage entre doublets repliés se révèle donc excellente même pour des faibles distances entre les doublets repliés.

Chapitre III

APPLICATIONS DEGAGEES AU COURS DE L'ETUDE

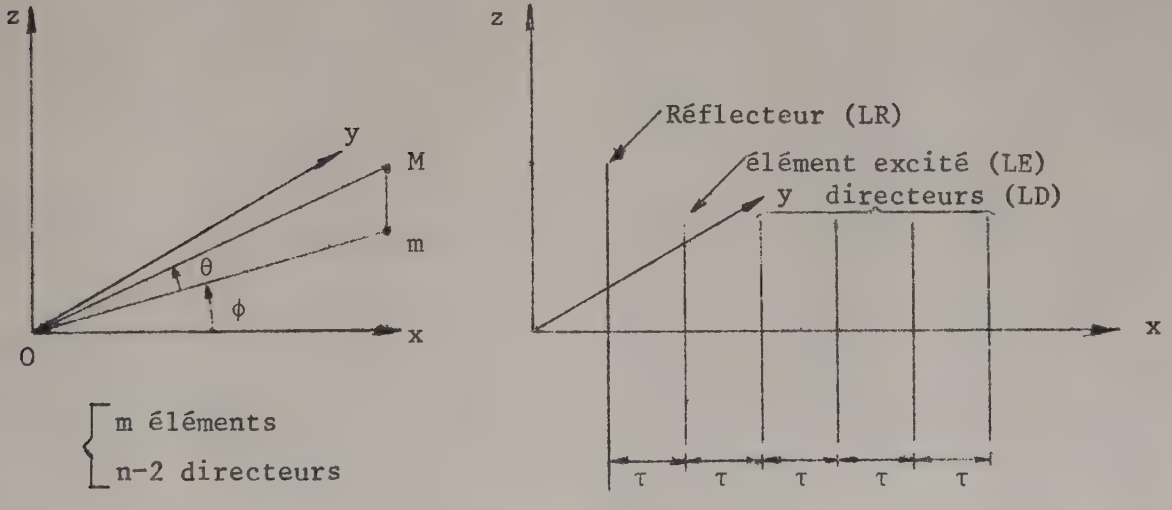
III .1 - ANTENNE YAGI.-

Notre méthode de calcul peut être appliquée aux antennes du type Yagi-Uda. Les antennes de ce type sont bien connues [8][9][11][23][28 à 31] et nous ne prétendons pas apporter quelque chose de nouveau en ce domaine. Par contre, nous utilisons les résultats expérimentaux obtenus sur des antennes de ce type pour illustrer la précision de notre méthode de calcul.

Les possibilités de notre programme de calcul s'étendent à un réseau d'éléments linéaires parallèles à un axe Oz et admettant le plan xoy comme plan de symétrie, pourvu que l'élément alimenté (un doublet conventionnel, un doublet replié ou même un doublet replié double) soit unique.

III.1.1 - Comparaisons de diagrammes expérimentaux et théoriques pour des antennes Yagi alimentées par un doublet conventionnel.-

Nous avons utilisé les mesures de GREEN [11] et nous allons définir tout d'abord notre antenne en reprenant ses notations.



Tous les directeurs ont la même longueur : L D ; l'élément excité est un doublet conventionnel de longueur : L E, alimenté symétriquement ; le réflecteur a pour longueur : L R. Les n éléments sont régulièrement espacés d'une distance τ et ont un diamètre commun D.

Nous avons traité les deux antennes définies ci-dessous :

	LR/λ_o	LE/λ_o	LD/λ_o	τ/λ_o	D/λ_o	fréquence de mesure	fréquence nominale
4 éléments	0,4826	0,4510	0,4430	0,15	0,01	2,370 GHz	2,4 GHz
10 éléments	0,4710	0,4468	0,4243	0,30	0,01	2,355 GHz	2,4 GHz

GREEN [11] a mesuré les diagrammes dans le plan E, c'est-à-dire dans le plan x o z (ϕ=0 et θ variant de -180° à + 180°). Nous avons introduit dans le programme des données géométriques correspondants à une fréquence nominale de 2,4 GHz donc à λ_o = 125 mm.

Puis, nous avons fait nos calculs aux fréquences exactes de mesure, à savoir 2,370 GHz pour l'antenne à 4 éléments et à 2,355 GHz pour l'antenne à 10 éléments.

Nous présentons les diagrammes de rayonnement sur les figures VIII-a et VIII-b dans le plan E pour chaque antenne en comparant la théorie et l'expérience. Pour l'antenne à 10 éléments (fig. VIII-b), nous montrons les calculs pour les nombres de découpage 0, 1 et 2. Le rapport avant-arrière est sensible au découpage, mais le niveau des lobes en est peu marqué.

La concordance entre la théorie et l'expérience est excellente, et nous semble meilleure que ce que nous avons trouvé par ailleurs dans la littérature [11] et [28].

Notre programme nous permet de traiter une antenne de type Yagi alimentée par un doublet replié. Les diagrammes de rayonnement ne seront pas changés, par contre l'impédance d'entrée sera profondément modifiée suivant que l'on utilise un doublet classique ou un doublet replié.

III.2 - DOUBLET REPLIE A LARGE BANDE PASSANTE.-

Sur la figure IV-A, nous avons vu que chaque courbe d'impédance présente une boucle dont la position dans l'abaque de Smith et la bande de fréquences varient en fonction des paramètres du demi-doublet replié.

Le doublet replié dont la bande passante semblait la plus large et l'adaptation d'impédance la plus simple est celui défini par : h = 75 mm ; a = 12 mm ; b = 18 mm et c = 1,5 mm. De telles dimensions sont inhabituelles, le rapport $\frac{h}{a}$ est alors égal à 6,25 et le rapport des rayons $\frac{a}{c}$ est égal à 8. En effet, les doublets repliés les plus généralement utilisés ontun brin alimenté dont le diamètre est plus faible que celui du brin parasite.

III.2.1 - Adaptation à large bande par un transformateur d'impédance Etude du doublet replié disposé parallèlement au dessus d'un plan réflecteur.

Dans le cas du doublet replié symétrique choisi, le rapport pour passer de l'impédance moyenne de la boucle (environ (80 - j 70) Ω) (et dont la valeur est le double de celle présentée sur le tableau IV-a) à l'impédance normalisée (50 Ω) est voisin de 1.

Compte-tenu de la structure du doublet replié, le transformateur d'impédance, réduit à un seul tronçon de ligne coaxiale, est logé à l'intérieur du brin alimenté (figure IX-a). Le tronçon de ligne coaxiale a pour impédance caractéristique 115 Ω et pour longueur 18 mm avec du téflon comme diélectrique.

Le rapport d'onde stationnaire rapporté à 50 Ω à l'entrée du doublet replié compensé isolé dans l'espace, reste inférieur à 2,5 sur une bande très voisine de l'octave, soit dans un rapport de fréquence 2 : 1.

L'avantage essentiel de notre antenne est que ses propriétés d'adaptation dans une large bande de fréquence sont peu affectées par la présence d'un plan conducteur de dimensions finies (ϕ = 600 mm).

Nous rappelons que pour un doublet traditionnel, en présence d'un plan réflecteur (à $\lambda/4$), de diamètre sensiblement égal à notre doublet replié, la bande passante n'est que de 1,25/1. Une étude expérimentale récente [21] montre qu'un "doublet manche" parallèle à un plan réflecteur de conception mécanique plus compliquée n'a qu'une bande passante de 1,8/1.

La propriété de ce doublet replié épais de conserver sa bande passante en présence d'un plan réflecteur est due, comme nous le montrerons à une diminution du couplage par rapport à celui de doublets traditionnels. Cette propriété est illustrée figure IX où l'on a fait varier la distance entre l'axe du brin alimenté du doublet replié et le plan réflecteur.

Nous avons choisi la distance d = 7 cm pour obtenir dans l'octave des diagrammes de rayonnement corrects. Cette distance représente à peu près $\lambda/4$ à F = 1 GHz, fréquence centrale de la bande passante. Un R.O.S. inférieur à 3 correspond à une bande passante d'une octave.

Nous avons mesuré les diagrammes de rayonnement dans les plans E et H pour trois fréquences : 0,6, 0,9 et 1,2 GHz, c'est-à-dire aux fréquences basse, moyenne et haute de la bande passante (figure IX-c).

A partir de ces diagrammes, nous pouvons calculer par intégration la directivité dans l'axe du réflecteur : (ou la calculer par la formule approchée $D = 10 \log_{10} \frac{41.253}{\theta_E \, \theta_H}$).

F(GHz)	0,6	0,9	1,2
Directivité (dB)	9,4	6,8	6,3

Cependant, la directivité particulièrement élevée pour la fréquence basse de la bande de fonctionnement appelle une explication. Nous allons fournir cette explication en deux étapes :

- le problème lié à la largeur de bande, relatif aux impédances et au couplage entre deux doublets,
- le problème de la directivité.

1 - IMPEDANCE :

Nous avons mesuré le couplage entre deux doublets repliés isolés dans l'espace. Ce couplage se définit par :

$$C = -10 \log_{10} \left(\frac{P_M}{P_r}\right)$$

P_r est la puissance réelle recueillie dans l'impédance Z_o fermant l'un des doublets, l'autre étant alimenté par un générateur d'impédance interne Z_o dont on peut extraire la puissance maximale P_M (Z_o = 50 Ω dans notre cas).

On trouve que :

$$C(dB) = 20 \log_{10} |s_{12}|$$

où s_{12} représente le rapport de l'onde transmise à la résistance de normalisation (50 Ω) sur laquelle est branché l'un des doublets, à l'onde transmise à l'entrée du doublet alimenté.

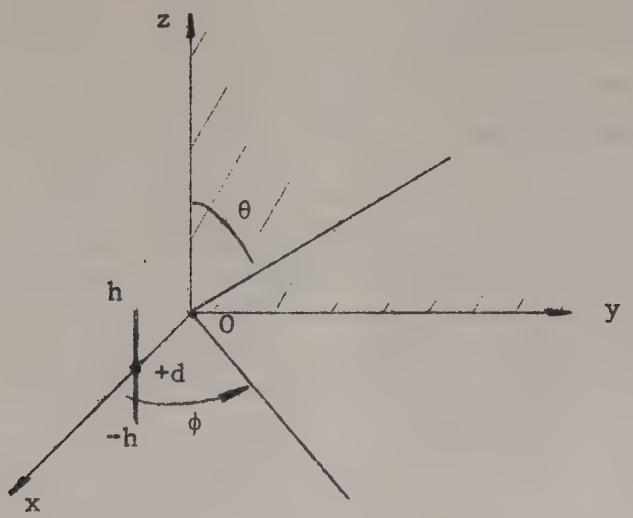
La figure X représente :

- d'une part, les valeurs mesurées du couplage en fonction de la fréquence et pour plusieurs distances entre les doublets repliés parallèles.

- d'autre part, les valeurs théoriques du couplage pour deux doublets classiques couplés et relativement épais ($\Omega = 8$).

On voit à distance égale l'augmentation du découplage entre les doublets repliés à large bande. Cette réduction du couplage entre les doublets repliés explique que la présence d'un réflecteur ne modifie sensiblement pas la bande passante.

2 - *DIRECTIVITE* : suivant les notations du § I.3.3 :



Cherchons le diagramme de rayonnement à grande distance d'un doublet de hauteur 2h parallèle à l'axe Oz, symétrique pour le plan xoy et situé à une distance d du plan yoz supposé parfaitement conducteur. D'après le principe des images électriques et en supposant un courant sinusoïdal sur le doublet, le champ à grande distance dans la direction θ , ϕ sera donné par l'expression :

$$E(\theta,\phi) = \sin\left[k_o d \sin\theta \cos\phi\right] \cdot \frac{\left[\cos(k_o h \cos\theta) - \cos k_o h\right]}{\sin\theta}$$

A) - Pour un doublet pour lequel $\frac{d}{\lambda_o} = \frac{h}{\lambda_o} = 1/4$, l'expression du champ E devient :

$$E(\theta,\phi) = \sin\left[\frac{\pi}{2} \sin\theta \cos\phi\right] \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos\theta)}{\sin\theta}$$

- Dans le plan H ($\theta = \frac{\pi}{2}$) le diagramme normalisé devient égal à :

$E(\theta = \frac{\pi}{2}, \phi) = \sin(\frac{\pi}{2} \cos\phi)$ et l'ouverture totale à 3 dB est $120° = \theta_H$.

- Dans le plan E ($\phi = 0$), le diagramme normalisé devient égal à :

$E(\theta, \phi = 0) = \sin\left[\frac{\pi}{2} \sin\theta\right] \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos\theta)}{\sin\theta}$ et l'ouverture totale à 3 dB est $\theta_E = 72°$.

On déduit approximativement la directivité par la formule :

$$D(dB) = 10 \log_{10}\left(\frac{41.253}{\theta_E \cdot \theta_H}\right) \text{ soit } 6,8 \text{ dB.}$$

B) - Pour un doublet symétrique pour lequel on aurait $\frac{d}{\lambda} = 0,14$ et $h = 0,15\ \lambda$ (correspondant exactement aux dimensions du doublet replié épais (figure IX-a) pour la fréquence 600 MHz).

Le diagramme devient égal à :

$$E(\theta,\phi) = \sin\left[50° \sin\theta \cos\phi\right] \frac{\left[\cos[54° \cos\theta] - 0,59\right]}{\sin\theta}$$

Les ouvertures totales à 3 dB obtenues sont :

$$\begin{cases} \theta_H = 98° \\ \theta_E = 62° \end{cases}$$

On a ainsi bénéficié d'une amélioration de la directivité par rapport au cas précédent principalement pour le plan H. La directivité calculée par la formule précédente donne alors la valeur de :

8,3 dB.

Le même calcul fait aux fréquences 0,9 et 1,2 GHz donne les résultats suivants : pour le doublet classique correspondant défini au § B ci-dessus.

F(GHz)	0,6	0,9	1,2
θ_E	62°	68°	76°
θ_H	98°	112°	130°
Directivité (dB)	8,3	7,35	6,2

La directivité obtenuepour ce doublet classique reste légèrement inférieure à celle obtenue pour le doublet replié épais précédent pour la fréquence basse F=0,6 GHz. L'influence du contrepoids peut expliquer cette différence. La diminution de l'ouverture à 3 dB des diagrammes de rayonnement d'un doublet classique dans les plans E et H lorsque h/λ et d/λ diminuent a été confirmée expérimentalement. Dans ce cas, l'antenne se trouve désadaptée et la bande passante devient très étroite.

Par contre, pour le doublet replié que nous avons défini, son adaptation demeure bonne dans une bande de fréquences d'un octave.

III.2.2 - Rayonnement d'un doublet replié symétrique immergé dans un diélectrique.-

Si nous rapportons la longueur hors tout du doublet replié précédent à la longueur d'onde maximum dans la bande de fonctionnement, nous obtenons :

$$\ell = 2\,h = 0{,}31\ \lambda_M \qquad \text{(fig. IX)}$$

A titre de comparaison, la réalisation citée précédemment (doublet "manche" [21]) nous donne $\ell = 0{,}36\ \lambda_M$ pour une bande réduite (1,8/1).

Nous avons réduit encore les dimensions en plaçant une antenne du même type dans un diélectrique de façon à abaisser la bande de fonctionnement. Nous avons utilisé un matériau de constante diélectrique relative moyenne $\varepsilon_r \simeq 6{,}2$ et ayant une tangente d'angle de pertes de l'ordre de 2.10^{-2} (fig. XII).

Dans ce cas, nous n'avons pas eu besoin de transformateur d'impédance. En effet, l'impédance moyenne de la boucle avait une partie réelle voisine de 50 Ω et une partie imaginaire capacitive. Il nous a donc suffi de retoucher la forme géométrique au voisinage de l'alimentation de façon à ajuster la capacité. La figure XI-a donne l'impédance et le R.O.S. obtenus.

La figure XI-b donne les diagrammes de rayonnement dans le plan E aux trois fréquences 0,5, 0,7 et 0,9 GHz. L'ouverture à 3 dB varie entre 80 et 89 degrés.

Le tableau suivant donne, en fonction de la fréquence, la directivité calculée en intégrant les diagrammes, ainsi que le défaut d'omnidirectionnalité dans le plan H.

f(GHz)	Directivité (dB)	Défaut d'omnidirectionnalité dans le plan H (dB)
0,5	1,8	± 0,7
0,6	1,8	± 1,0
0,7	1,9	± 0,5
0,8	2,0	± 0,6
0,9	2,2	± 1,1

La directivité est très voisine de celle du doublet demi-onde, ce qui est normal car dans l'expression du champ lointain, n'interviendra que le courant symétrique. Les défauts d'omnidirectionnalité sont certainement imputables au courant antisymétrique. (Voir § II.2.2).

Le grand intérêt de cette dernière application est évidemment le gain réalisé en dimensions. Le R.O.S. reste inférieur à 2,6 de 0,5 à 0,91 GHz. La bande passante a donc un rapport de 1,82 : 1. Et le gain en dimensions se traduit par $\ell = 2h = 0{,}25\ \lambda_M$.

Evidemment, cette réduction en dimensions s'est traduite par une perte en largeur de bande. Mais le dernier rapport de bande passante obtenu (1,82 : 1) est très intéressant, car il couvre la bande UHF de télécommunications (de 225 à 400 MHz, soit 1,78 : 1). Cette dernière antenne, doublet replié à large bande dans un diélectrique, pourra être utilisée comme antenne omnidirectionnelle dans la bande UHF de télécommunications.

CONCLUSION.-

La méthode de calcul de l'équation intégrale présentée dans ce document donnant la loi de distribution des courants le long d'un doublet pouvant être grand par rapport à la longueur d'onde n'a pas été réellement utilisée dans les cas pratiques examinés : doublets repliés couplés ou non, antenne Yagi. En effet, ces éléments rayonnants avaient des dimensions relativement faibles par rapport à la longueur d'onde et leur traitement ne nécessitait en réalité qu'un faible nombre de découpage. Néanmoins la méthode garde toute sa valeur pour d'autres applications (exemple antenne log-périodique dont les éléments rayonnants peuvent être des doublets repliés).

Le travail essentiel a été d'apporter une contribution à la connaissance du doublet replié et du couplage entre doublets repliés. La confrontation entre la théorie et l'expérimentation a permis de trouver des lois empiriques de correction du second ordre sur l'admittance d'entrée théorique pour tenir compte de l'effet d'extrémité (court-circuit imparfait) et cela pour une grande variété de doublets repliés. Ces lois, sont valables pour une configuration donnée de la zone d'alimentation du doublet (en particulier l'angle du cône d'alimentation). On voit que la théorie ainsi corrigée s'identifie parfaitement avec l'expérience sauf peut être pour les doublets repliés à brin alimenté épais, (figure IV-a). Ces lois empiriques de correction se sont également révélées efficaces dans l'étude du couplage entre doublets repliés.

Nous avons à cette occasion dégagé deux applications :

- un doublet symétrique replié en présence d'un plan réflecteur qui garde une adaptation et des diagrammes de rayonnement unidirectionnels corrects dans une bande de fréquence d'une octave.

- Un doublet replié symétrique immergé dans un diélectrique fonctionnant correctement dans une bande de fréquences de 1,8/1 et dont la hauteur hors tout (2 h) est égale à 0,25 λ_M (λ_M étant la longueur d'onde dans le vide à la fréquence la plus basse de la bande).

Ces deux applications ont fait l'objet d'un brevet d'invention |7| et d'un compte-rendu |6|.

Annexe I | EVALUATION DES FONCTIONS Ca(H,Z,A), Sa(H,Z,A) et Ea(H,Z,A).

$$\begin{bmatrix} Ca(H,Z,A) \\ Sa(H,Z,A) \\ Ea(H,Z,A) \end{bmatrix} = \int_{-H}^{+H} \begin{bmatrix} \cos Z' \\ \sin|Z'| \\ 1 \end{bmatrix} \frac{e^{-j\sqrt{(Z-Z')^2 + A^2}}}{\sqrt{(Z-Z')^2 + A^2}} . \, dZ'$$

$$= \int_{o}^{H} \begin{bmatrix} \cos Z' \\ \sin Z' \\ 1 \end{bmatrix} . \left(\frac{e^{-j\sqrt{(Z-Z')^2 + A^2}}}{\sqrt{(Z-Z')^2 + A^2}} + \frac{e^{-j\sqrt{(Z+Z')^2 + A^2}}}{\sqrt{(Z+Z')^2 + A^2}} \right) . dZ'$$

Posons $R_+ = \sqrt{(Z+Z')^2 + A^2}$ et $R_- = \sqrt{(Z-Z')^2 + A^2}$

d'où il vient : $$\begin{bmatrix} Ca(H,Z,A) \\ Sa(H,Z,A) \\ Ea(H,Z,A) \end{bmatrix} = \int_{o}^{H} \begin{bmatrix} \cos Z' \\ \sin Z' \\ 1 \end{bmatrix} . \left(\frac{e^{-jR_+}}{R_+} + \frac{e^{-jR_-}}{R_-} \right) . \, dZ'$$

1) Calcul de Ea.

$$Ea = \int_{o}^{H} \left(\frac{e^{-jR_+}}{R_+} + \frac{e^{-jR_-}}{R_-} \right) . \, dZ'$$

Effectuons les changements de variables : $Z+Z' = u$ et $Z-Z'=u$

$$Ea = \int_{Z}^{Z+H} \frac{e^{-j\sqrt{u^2+A^2}}}{\sqrt{u^2+A^2}} \, du - \int_{Z}^{Z+H} \frac{e^{-j\sqrt{u^2+A^2}}}{\sqrt{u^2+A^2}} \, du = \int_{Z-H}^{Z+H} \frac{e^{-j\sqrt{u^2+A^2}}}{\sqrt{u^2+A^2}} \, du$$

La partie réelle de la fonction sous le signe somme présente un pic au voisinage de u = 0. Ceci explique nos calculs :

$$Ea = \int_{Z-H}^{Z+H} \left(\frac{e^{-j\sqrt{u^2+A^2}} - 1}{\sqrt{u^2+A^2}} \right) du + \int_{Z-H}^{Z+H} \frac{du}{\sqrt{u^2+A^2}}$$

Or : $$\frac{du}{\sqrt{u^2+A^2}} = - \frac{d(\sqrt{u^2+A^2} - u)}{(\sqrt{u^2+A^2} - u)}$$

d'où : $$Ea = \int_{Z-H}^{Z+H} \frac{\cos\sqrt{u^2+A^2} - 1}{\sqrt{u^2+A^2}} du + j \int_{Z-H}^{Z+H} \frac{\sin\sqrt{u^2+A^2}}{} du - \left[\text{Log}(\sqrt{u^2+A^2}-u) \right]_{Z-H}$$

Les deux fonctions non intégrées, appelées cosinus et sinus intégraux généralisés, ont été étudiées par KING [17].

Elles se prêtent bien à une intégration par la méthode de Gauss à 16 points que nous appliquons deux fois respectivement sur les intervalles [Z-H,Z] et [Z,Z+H]. Cependant nous ne connaissons pas exactement la précision de ce calcul de Ea.

2) Calcul de Ca et Sa.

$$\begin{cases} Ca + j\ Sa = e^{-jZ} \int_o^H e^{j(Z+Z')} . \frac{e^{-jR_+}}{R_+} dZ' + e^{jZ} . \int_o^H e^{j(Z'-Z)} . \frac{e^{-jR_-}}{R_-} . dZ' \\ Ca - j\ Sa = e^{-jZ} \int_o^H e^{-j(Z'-Z)} . \frac{e^{-jR_-}}{R_-} . dZ' + e^{jZ} . \int_o^H e^{-j(Z+Z')} . \frac{e^{-jR_+}}{R_+} . dZ' \end{cases}$$

Nous allons étudier ensemble les quatre intégrales :

$$I_1 = \int_o^H \frac{e^{j[(Z+Z') - \sqrt{(Z+Z')^2+A^2}]}}{\sqrt{(Z+Z')^2+A^2}} . dZ'$$

$$I_2 = \int_o^H \frac{e^{j[(Z-Z') - \sqrt{(Z-Z')^2+A^2}]}}{\sqrt{(Z-Z')^2+A^2}} . dZ'$$

$$I_3 = \int_o^H \frac{e^{j[(Z'-Z) - \sqrt{(Z-Z')^2 + A^2}]}}{\sqrt{(Z-Z')^2 + A^2}} \cdot dZ'$$

$$I_4 = \int_o^H \frac{e^{j[-(Z+Z') - \sqrt{(Z+Z')^2 + A^2}]}}{\sqrt{(Z+Z')^2 + A^2}} \cdot dZ'$$

Connaissant ces quatre intégrales, il nous sera facile de connaître Ca et Sa :

$$\begin{cases} 2\,Ca = e^{-jZ}\,(I_1 + I_2) + e^{jZ}\,(I_3 + I_4) \\ 2j\,Sa = e^{-jZ}\,(I_1 - I_2) + e^{jZ}\,(I_3 - I_4) \end{cases}$$

	$I_1 = \int_0^H e^{j(Z+Z')} \cdot \frac{e^{-jR_+}}{R_+} dZ'$	$I_4 = \int_0^H e^{-j(Z+Z')} \cdot \frac{e^{-jR_+}}{R_+} dZ'$	$I_2 = \int_0^H e^{-j(Z'-Z)} \cdot \frac{e^{-jR_-}}{R_-} dZ'$	$I_3 = \int_0^H e^{j(Z'-Z)} \cdot \frac{e^{-jR_-}}{R_-} dZ'$
1er changement de variable	$Z+Z' = A\ sht$ $\rightarrow \begin{cases} R_+ = A\ cht \\ \frac{dZ'}{R_+} = dt \end{cases}$ $I_1 = \int_\alpha^\beta e^{jA(sht-cht)} dt = \int_\alpha^\beta e^{-jAe^{-t}} . dt$	$Z+Z' = A\ sht$ $\rightarrow \begin{cases} R_+ = A\ cht \\ \frac{dZ'}{R_+} = dt \end{cases}$ $I_4 = \int_\alpha^\beta e^{-jA(sht+cht)} dt = \int_\alpha^\beta e^{-jAe^{t}} . dt$	$Z'-Z = A\ sht$ $\rightarrow \begin{cases} R_- = A\ cht \\ \frac{dZ'}{R_-} = dt \end{cases}$ $I_2 = \int_\alpha^\beta e^{-jA(sht+cht)} dt = \int_\alpha^\beta e^{-jAe^{t}} dt$	$Z'-Z = A\ sht$ $\rightarrow \begin{cases} R_- = A\ cht \\ \frac{dZ'}{R_-} = dt \end{cases}$ $I_3 = \int_\alpha^\beta e^{jA(sht-cht)} dt = \int_\alpha^\beta e^{-jAe^{-t}} . dt$
2ème changement de variable	$X = A\ e^{-t} \rightarrow dt = -\frac{dX}{X}$ $I_1 = -\int_{X_1}^{X_2} \frac{e^{-jX}}{X} dX$	$X = A\ e^{t} \rightarrow dt = \frac{dX}{X}$ $I_4 = \int_{X_1}^{X_2} \frac{e^{-jX}}{X} dX$	$X = A\ e^{t} \rightarrow dt = \frac{dX}{X}$ $I_2 = \int_{X_1}^{X_2} \frac{e^{-jX}}{X} dX$	$X = A\ e^{-t} \rightarrow dt = -\frac{dX}{X}$ $I_3 = -\int_{X_1}^{X_2} \frac{e^{-jX}}{X} dX$
Calcul des bornes	$Z = A\ sh\ \alpha \quad X_1 = Ae^{-\alpha}$ $Z+H = A\ sh\ \beta \quad X_2 = Ae^{-\beta}$ $\begin{cases} X_1 = \sqrt{A^2+Z^2} - Z \\ X_2 = \sqrt{A^2+(Z+H)^2} - (Z+H) \end{cases}$	$Z = A\ sh\ \alpha \quad X_1 = Ae^{\alpha}$ $Z+H = A\ sh\ \beta \quad X_2 = Ae^{\beta}$ $\begin{cases} X_1 = \sqrt{A^2+Z^2} + Z \\ X_2 = \sqrt{A^2+(Z+H)^2} + (Z+H) \end{cases}$	$-Z = A\ sh\ \alpha \quad X_1 = Ae^{\alpha}$ $H-Z = A\ sh\ \beta \quad X_2 = Ae^{\beta}$ $\begin{cases} X_1 = \sqrt{A^2+Z^2} - Z \\ X_2 = \sqrt{A^2+(Z-H)^2} - (Z-H) \end{cases}$	$-Z = A\ sh\ \alpha \quad X_1 = Ae^{-\alpha}$ $H-Z = A\ sh\ \beta \quad X_2 = Ae^{-\beta}$ $\begin{cases} X_1 = \sqrt{A^2+Z^2} + Z \\ X_2 = \sqrt{A^2+(Z-H)^2} + (Z-H) \end{cases}$
Définition de la fonction F(X)	$-\int_{X_1}^{X_2} \frac{e^{-jX}}{X} dX = \int_{X_1}^{X_2} \left(\frac{1-\cos X}{X}\right) dX - \int_{X_1}^{X_2} \frac{dX}{X} + j \int_{X_1}^{X_2} \frac{\sin X}{X} dX = \left| Cin(X) - Log(X) + j\ Si(X) \right|_{X_1}^{X_2} = F(X_2) - F(X_1)$			
Valeur des intégrales en fonction de F(X)	$I_1 = F\left(\sqrt{A^2+(Z+H)^2} - (Z+H)\right) - F\left(\sqrt{A^2+Z^2} - Z\right)$	$I_4 = F\left(\sqrt{A^2+Z^2} + Z\right) - F\left(\sqrt{A^2+(Z+H)^2} + (Z+H)\right)$	$I_2 = F\left(\sqrt{A^2+Z^2} - Z\right) - F\left(\sqrt{A^2+(Z-H)^2} - (Z-H)\right)$	$I_3 = F\left(\sqrt{A^2+(Z-H)^2} + (Z-H)\right) - F\left(\sqrt{A^2+Z^2} + Z\right)$

Pour programmer la fonction F(X), nous avons utilisé trois méthodes suivant la valeur de l'argument.

1/ $0 < X \leq 2$ nous avons développé Cin et Si en séries entières.

$$\begin{cases} Cin(X) = \int_0^X \frac{1-\cos t}{t}\,dt = \frac{X^2}{2.2!} - \frac{X^4}{4.4!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{X^{2n}}{2n.2n!} + \ldots \\ Si(X) = \int_0^X \frac{\sin t}{t}\,dt = X - \frac{X^3}{3.3!} + \frac{X^5}{5.5!} + \ldots + (-1)^n \frac{X^{2n+1}}{(2n+1).(2n+1)!} + \ldots \end{cases}$$

La série étant alternée et le module du terme général décroissant, le reste est inférieur au dernier terme négligé.

$$F(X) = Cin(X) - Log(X) + j\ Si(X)$$

2/ $2 < X < 16$ nous utilisons le développement en série de TCHEBYCHEFF |4, 25, 2| des fonctions $Si(X) = \int_0^X \frac{\sin t}{t}\,dt$

et $Ci(X) = \gamma + Log(X) - \int_0^X \frac{1-\cos t}{t}\,dt$

donc : $F(X) = \gamma - Ci(X) + j\ Si(X)$

3/ $16 \leq X$ nous utilisons une autre définition des sinus et cosinus intégraux.

On peut écrire : $F(X) = \gamma + j\frac{\pi}{2} + e^{-jK}.(g(x) - j\ f(x))$

avec $f(x) = 2\int_0^\infty K_o(2\sqrt{xt})\cos t\,dt$ et $g(x) = 2\int_0^\infty K_o(2\sqrt{xt})\sin t\,dt$

où $K_o(u)$ est la fonction de Bessel modifiée et γ la constante d'Euler.

Nous développons les fonctions f et g en série de TCHEBYCHEFF |4, 25, 2|.

Cette méthode donne des résultats excellents car elle est rapide et très précise (de l'ordre de 10^{-13}). Nous avons créé en sous-programme inter-

médiaire qui calcule Ea par une méthode de Gauss, ainsi que Ca et Sa en faisant appel six fois à la fonction F. On comprend donc aisément l'intérêt présenté par une optimisation de la programmation de la fonction F.

Annexe II | EVALUATION DES FONCTIONS $C_b(X,\theta)$, $S_b(X,\theta)$, $E_b(X,\theta)$ et $F_b(X,\theta)$.-

Ces fonctions apparaissent dans le calcul du champ rayonné à grande distance. Elles sont définies par :

$$\left\{ \begin{bmatrix} C_b(X,\theta) \\ S_b(X,\theta) \\ E_b(X,\theta) \end{bmatrix} = \frac{\sin\theta}{2} \int_{-X}^{X} \begin{bmatrix} X \\ \sin|Z'| \\ 1 \end{bmatrix} . e^{jZ'\cos\theta} .dZ' = \sin\theta \int_{0}^{X} \begin{bmatrix} \cos Z' \\ \sin Z' \\ 1 \end{bmatrix} . \cos(Z'\cos\theta).dZ' \right.$$

$$\text{avec : } F_b(X,\theta) = E_b(X,\theta) - \cos X.\ C_b(X,\theta) - \sin X.\ S_b(X,\theta)$$

Si l'on tient compte de la signification physique de θ et des symétries du problème posé, on se rend compte que θ varie seulement de 0 à $\pi/2$.

à $\theta = 0$ correspond la direction du doublet. Le champ rayonné dans cette direction sera nul. Nous obtenons bien :

$$C_b(X, 0) = S_b(X, 0) = E_b(X, 0) = F_b(X, 0) = 0$$

à $\theta = \pi/2$ correspond le plan perpendiculaire au doublet, c'est-à-dire le plan H d'après nos conventions.

θ variant de 0 à $\pi/2$ servira à décrire un plan E contenant le doublet.

1) *Calcul pour $\theta=\pi/2$, c'est-à-dire dans le plan H.*

Les calculs se simplifient beaucoup et l'on obtient de suite :

$$\begin{cases} C_b(X, \pi/2) = \sin X \\ S_b(X, \pi/2) = 1 - \cos X \\ E_b(X, \pi/2) = X \\ F_b(X, \pi/2) = X - \sin X \end{cases}$$

2) *Calcul dans un plan* $E(\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[)$.

$$C_b(X,\theta)=\sin\theta \int_0^X \cos Z'.\cos(Z'\cos\theta)dZ' = \frac{\sin\theta}{2} \int_0^X \{\cos[Z'(1+\cos\theta)]+\cos[Z'(1-\cos\theta)]\}dZ'$$

$$= \frac{\sin\theta}{2}\left[\frac{\sin(X(1+\cos\theta))}{1+\cos\theta} + \frac{\sin(X(1-\cos\theta))}{1-\cos\theta}\right]$$

soit, après simplification :

$$\boxed{C_b(X,\theta\neq 0) = \frac{\sin X.\cos(X\cos\theta)-\cos\theta.\cos X.\sin(X\cos\theta)}{\sin\theta}}$$

$$S_b(X,\theta)=\sin\theta\int_0^X \sin Z'.\cos(Z'\cos\theta)dZ' = \frac{\sin\theta}{2} \int_0^X \{\sin[Z'(1+\cos\theta)]+\sin[Z'(1-\cos\theta)]\}dZ'$$

$$= \frac{\sin\theta}{2}\left[\frac{1-\cos(X(1+\cos\theta))}{1+\cos\theta} + \frac{1-\cos(X(1-\cos\theta))}{1-\cos\theta}\right]$$

Soit après simplification :

$$\boxed{S_b(X,\theta\neq 0) = \frac{1-\cos X.\cos(X\cos\theta) - \cos\theta.\sin X.\sin(X\cos\theta)}{\sin\theta}}$$

$$E_b(X,\theta) = \sin\theta \int_0^X \cos(Z'\cos\theta)\,dZ'$$

$$\boxed{E_b(X,\theta\neq\tfrac{\pi}{2}) = \frac{\sin\theta.\sin(X\cos\theta)}{\cos\theta}}$$

$$F_b(X,\theta) = E_b(X,\theta) - \cos X.C_b(X,\theta) - \sin X.S_b(X,\theta)$$

$$= \frac{1}{\cos\theta.\sin\theta}\left\{\begin{array}{l}\sin^2\theta.\sin(X\cos\theta)-\sin X.\cos X.\cos\theta.\cos(X\cos\theta)+\cos^2\theta.\cos^2 X.\sin(X\cos\theta) \\ -\sin X.\cos\theta+\cos X.\sin X.\cos\theta.\cos(X\cos\theta)+\cos^2\theta.\sin^2 X.\sin(X\cos\theta)\end{array}\right\}$$

Nous obtenons donc :

$$F_b(X, \theta \neq k\frac{\pi}{2}) = \frac{\sin(X.\cos\theta) - \sin X.\ \cos\theta}{\sin\theta\ .\ \cos\theta}$$

Annexe III | CALCUL DES CORRECTIONS COMPLEXES LINEAIRES EN FONCTION DE LA FREQUENCE.

Soit y_i la différence entre l'admittance mesurée et l'admittance calculée en tenant compte de la correction d sur la hauteur du doublet.

Soit x_i la fréquence correspondant à y_i.

Nous cherchons la droite des moindres carrés a x + b approchant au mieux la série d'observation y_i ($i \in \{1,2,\dots k\}$).

On a : a, b, $y_i \in \mathbb{C}$ et $x_i \in \mathbb{R}^+$.

Nous définissons un écart type réel σ grâce à la norme hermitienne :

$$s_i = y_i - a\,x_i - b \qquad \text{et} \qquad \sigma = \sum_{i=1}^{k} s_i . s_i^* = \sum_{i=1}^{k} |s_i|^2$$

$$s_i\, s_i^* = y_i\, y_i^* + a\, a^*\, x_i^2 + b b^* - (a y_i^* + a^* y_i) x_i - (b y_i^* + b^* y_i) + (a b^* + a^* b) x_i$$

$$= |y_i|^2 + |a|^2\, x_i^2 + |b|^2 - 2R_e(a^* y_i).x_i - 2R_e(b^* y_i) + 2R_e(a^* b).x_i$$

Décomposons les termes complexes en parties réelle et imaginaire, et définissons nos conventions d'écriture (ar, as, Xr, XXr, XYr, XYs, br, bs, Yr, Ys, YYr) $\in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} a = ar + j\,as \;\; ; \; \Sigma\, x_i = Xr = X \;\; ; \; \Sigma\, x_i^2 = XXr = XX \;\; ; \; \Sigma\, x_i y_i = XYr + jXYs = XY \\ b = br + j\,bs \;\; ; \; \Sigma\, y_i = Yr + j\,Ys = Y \;\; ; \; \Sigma\, |y_i|^2 = YYr = YY \end{cases}$$

σ est donc un polynome de degré deux, fonction des quatre variables réelles ar, br, as et bs :

$$\sigma = YY + ar^2\, XX + br^2\, n - 2\, ar\, XYr - 2\, br\, Yr + 2\, ar\, br\, X$$
$$+ as^2\, XX + bs^2 n - 2\, as\, XYs - 2\, bs\, Ys + 2\, as\, bs\, X$$

Le minimum de σ s'obtiendra par : $\frac{\partial\sigma}{\partial ar} = \frac{\partial\sigma}{\partial as} = \frac{\partial\sigma}{\partial br} = \frac{\partial\sigma}{\partial bs} = 0$

soit : $\begin{cases} ar\ XX + br\ X - XYr = 0 \\ as\ XX + bs\ X - XYs = 0 \end{cases}$ et : $\begin{cases} ar\ X + br\ n - Yr = 0 \\ as\ X + bs\ n - Ys = 0 \end{cases}$

En regroupant ces équations, nous obtenons un système linéaire pour définir a et b complexes analogue à celui que l'on obtient pour une série de mesures réelles :

$$\begin{cases} aXX + bX = XYr + jXYs = XY \\ aX + bn = Yr + j\ Ys = Y \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{n.XY - X.Y}{n.XX - X.X} \\ b = \dfrac{Y.XX - X.XY}{n.XX - X.X} \end{cases}$$

Les valeurs que nous obtenons pour a et b sont les mêmes que si l'on avait séparé les problèmes relatifs à la susceptance et à la conductance, par contre, notre critère de choix (σ) est unique pour obtenir la correction "d_o"optimum.

Annexe IV | APPROXIMATION D'UNE SURFACE CONNUE EN NP points $\{z_i\}$ PAR UN POLYNOME A DEUX VARIABLES ET DE DEGRE ND : $P_{ND}(x, y)$.

1) *Ecriture du polynome.*

Un polynome de degré ND peut s'écrire sous la forme :

$$P_{ND}(x, y) = \sum_{k=0}^{ND} \sum_{\ell=0}^{k} C_{k,\ell} x^{k-\ell} y^{\ell}$$

cependant, pour la suite du problème, il est plus intéressant d'indicer différemment les coefficients du polynome.

Nous posons donc : $D_m = C_{k,\ell}$

$$\text{avec : } m = \frac{k(k+1)}{2} + \ell + 1$$

En clair, ceci donne pour un polynome de degré 2 :

$$\begin{cases} P_2(x,y) = C_{o,o} + C_{1,0}\, x + C_{1,1}\, y + C_{2,0}\, x^2 + C_{2,1}\, xy + C_{2,2}\, y^2 \\ P_2(x,y) = D_1 + D_2 x + D_3 y + D_4\, x^2 + D_5\, xy + D_6\, y^2 \end{cases}$$

2) *Ecriture du système linéaire.*

Nous utiliserons une méthode analogue aux moindres carrés, et pour cela, nous définissons une somme d'écarts-type s telle que :

$$s = \sum_{i=1}^{NP} (P_{ND}(x_i , y_i) - z_i)^2$$

s est donc un polynome de degré 2 en fonction des coefficients du polynome $P_{ND}(x, y)$. Le minimum de cette fonction s s'obtiendra donc pour $\frac{\partial s}{\partial D_n} = 0$ pour n variant de 1 à $\frac{(ND+1)(ND+2)}{2}$. Bien évidemment, ND doit être tel que :

$$\frac{(ND+1)(ND+2)}{2} < NP$$

c'est-à-dire que le nombre de coefficients du polynôme $P_{ND}(x,y)$ doit être inférieur au nombre de points d'observation NP.

Ecrivons donc les équations linéaires : $\frac{\partial s}{\partial C_{p,q}} = 0$

$$\sum_{k=0}^{ND} \sum_{\ell=0}^{k} C_{k,\ell} \sum_{i=1}^{NP} (x_i^{k-\ell}\, y_i^{\ell}\, x_i^{p-q}\, y_i^{q}) = \sum_{i=1}^{NP} (z_i\, x_i^{p-q}\, y_i^{q})$$

Nous avons donc un système linéaire de $\frac{(ND+1)(ND+2)}{2}$ équations de la forme $\sum_{m=o}^{K} A_{n,m}\, D_m = B_n$ avec $K = \frac{(ND+1)(ND+2)}{2}$.

$$\begin{cases} A_{n,m} = \sum_{i=1}^{NP} (x_i^{p+k-\ell-q}\, y_i^{\ell+q}) \\ B_n = \sum_{i=1}^{NP} (z_i\, x_i^{p-q}\, y_i^{q}) \\ n = \frac{(p+1)p}{2} + q + 1 \\ m = \frac{(k+1)k}{2} + \ell + 1 \end{cases}$$

Deux remarques s'imposent, car elles vont simplifier beaucoup le problème :

- La matrice A est symétrique.

Ceci va nous permettre d'utiliser un sous-programme d'inversion de matrices adapté aux matrices symétriques. Nous avons utilisé la méthode de CHOLEWSKY [3].

- D'autre part, les matrices A' correspondant à des degrés ND' inférieurs à ND sont des sous matrices de A.

Ceci nous permet de calculer une seule fois la matrice A correspondant au plus haut degré désiré pour le polynôme d'approximation. Nous la mettons en mémoire pour la suite des calculs.

3) *Construction de la matrice A.*

Pour construire cette matrice A, nous allons calculer des sommes $S_{\alpha,\beta}$ telles que :

$$S_{\alpha,\beta} = \sum_{i=1}^{NP} x_i^{\alpha-\beta}\, y_i^{\beta} \qquad \begin{cases} 0 \leq \alpha \leq 2.ND \\ 0 \leq \beta \leq 2.ND \end{cases}$$

Nous calculerons seulement $4.ND^2$ sommes alors que la matrice A possède $\frac{(ND+1)^2(ND+2)^2}{4}$ termes, ce qui représente un gain considérable de calculs, et donc de temps d'ordinateur.

Connaissant une somme du type $S_{\alpha,\beta}$ il nous faut la placer ensuite dans la matrice A, pour celà nous allons chercher toutes les solutions entières du système d'équations :

$$\begin{cases} k + p = \alpha \\ \ell + q = \beta \end{cases} \quad \text{avec les contraintes :} \quad \begin{cases} 0 \leq \ell \leq k \leq ND \\ 0 \leq q \leq p \leq ND \end{cases}$$

A chaque solution obtenue, nous calculerons les indices n et m par les relations :

$$\begin{cases} n = \frac{(p+1)p}{2} + q + 1 \\ m = \frac{(k+1)k}{2} + \ell + 1 \end{cases}$$

Ainsi nous remplirons la matrice A en effectuant un nombre réduit d'opérations et en réalisant donc un gain considérable de temps.

4) *Généralisation de la méthode.*

Ce procédé se généralise facilement, et nous le décrivons succintement sur une densité ρ_i approximée par un polynôme de degré ND à trois variables.

$$P_{ND}(a,b,c) = \sum_{k_1=0}^{ND} \sum_{k_2=0}^{k_1} \sum_{k_3=0}^{k_2} C_{k_1,k_2,k_3}\, a^{k_1-k_2}\, b^{k_2-k_3}\, c^{k_3}$$

on posera : $D_m = C_{k_1,k_2,k_3}$

avec $$m = \frac{k_1(k_1+1)(k_1+2)}{6} + \frac{k_2(k_2+1)}{2} + k_3 + 1$$

Le nombre de coefficients du polynôme sera :

$$K = \frac{(ND+1)(ND+2)(ND+3)}{6}$$

On retrouve un système linéaire tel que :

$$\sum_{m=1}^{K} A_{n,m} D_m = B_n$$

avec :

$$\begin{cases} A_{n,m} = \sum_{i=1}^{NP} a_i^{k_1+\ell_1-k_2-\ell_2} b_i^{k_2+\ell_2-k_3-\ell_3} c_i^{k_3+\ell_3} \\ B_n = \sum_{i=1}^{NP} a_i^{k_1-k_2} b_i^{k_2-k_3} c_i^{k_3} \rho_i \\ n = \frac{k_1(k_1+1)(k_1+2)}{6} + \frac{k_2(k_2+1)}{2} + k_3+1 \\ m = \frac{\ell_1(\ell_1+1)(\ell_1+2)}{6} + \frac{\ell_2(\ell_2+1)}{2} + \ell_3+1 \end{cases}$$

Pour placer les sommes $S_{\alpha,\beta,\gamma} = \sum_{i=1}^{NP} a_i^{\alpha-\beta} b_i^{\beta-\gamma} c_i^{\gamma}$ nous allons résoudre :

$$\begin{cases} k_1+\ell_1 = \alpha \\ k_2+\ell_2 = \beta \\ k_3+\ell_3 = \gamma \end{cases} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} 0 \leq k_3 \leq k_2 \leq k_1 \leq ND \\ \\ 0 \leq \ell_3 \leq \ell_2 \leq \ell_1 \leq ND \end{cases}$$

BIBLIOGRAPHIE

|1| J. M. BACON, R.G. MEDHURST :
Superdirective aerial array containing only one fed element.
Proc. I.E.E (London). p. 365 à 372, vol. 116, n° 3, March 1969.-

|2| R. BULIRSCH :
Numerical calculation of the sine, cosine and Fresnel integrals.
Numerische Mathematik. p. 380 à 385, n° 9, 1967.-

|3| Bibliothèque Scientifique du Centre de Calcul (Université de Rennes).
E2-DECHOL - Inversion de matrice symétrique en double précision par la méthode de CHOLEWSKY.-

|4| C. W. CLENSHAW, G. F. MILLER, M. WOODGER :
Algorithms for special functions - I -
Numerische Mathematik, p. 403 à 419, n° 4, 1963.-

|5| J. P. DANIEL, G. DUBOST :
Etude du couplage entre dipôles.
Application à une antenne dipolaire épaisse à périodicité logarithmique.
Annales des Télécommunications, p. 105 à 133, Tome 26, Mars-Avril 1971.-

|6| G. DUBOST, L. GUILLOU, J.P. DANIEL :
Rayonnement d'un doublet replié symétrique, en présence d'un plan réflecteur.
C.R. Acad. Sc. Paris. p. 923 à 925, tome 275, série : B, 18 décembre 1972.-

|7| G. DUBOST, L. GUILLOU, J. P. DANIEL :
Doublet replié symétrique unidirectionnel à large bande.
Brevet d'Invention, n° 73 00543 déposé le 9 janvier 1973.-

|8| H.W. EHRENSPECK, H. POEHLER :
A new method for obtaining maximum gain from Yagi antennas.
IRE Trans. Antennas and Propagation - p. 379 à 386, vol. AP.7, october 1959.-

|9| R.M. FISHENDEN, E.R. WIBLIN :
Design of Yagi aerials.
Proc. I.E.E. (London). p. 5 à 13 - pt 3 - vol 96 - n° 39 - January 1949.-

|10| J. P. GERMAN, F. E. BROOKS :
The effect of the physical parameters on the bandwith of a folded dipole.
IRE Trans. Antennas and Propagation - p. 186 à 190 - April 1958.-

|11| H. E. GREEN :
Design data for short and medium length Yagi-Uda arrays.
Elec. Engrg. Trans. Inst. Engrs. (Australia). P. 1 à 8, March 1966.-

|12| R. GUERTLER :
Folded dipoles of two or more elements.
Jour. of the British institution of Radio Engineers.
p. 332 à 336 - Vol. 13, n° 6, June 1953.-

|13| R. GUERTLER :
Impedance transformation in folded dipoles.
Proc. IRE - p. 1042 à 1047 - September 1950.-

|14| W.W. HANSEN, J.R. WOODYARD :
A new principle in directional antenna design.
Proc. IRE - p. 333 à 345, vol. 26 - March 1938.-

|15| B. JOSEPHSON :
The quarter-wave dipole.
IRE WESCON convention record, p. 77 à 90 - Part 1 - N° 1, 1957.-

|16| KING, MIMNO, WING :
Transmission's lines, antennas and waveguides - P. 224 à 226 -
Mc Graw Hill Book Co., New York, 1945.-

|17| R.W.P. KING :
The theory of linear antennas - p. 94 à 100.
Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1956.-

|18| R.W.P. KING, C.W. HARRISON :
Antennas and waves : a modern approach - p. 201 à 225
M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts and London, England, 1969.-

|19| R.W.P. KING, E.A. ARONSON, C.W. HARRISON :
Determination of the admittance and effective length of cylindrical antennas.
Radio Science, vol. 1 (New series), N° 7, July 1966.-

|20| R.W.P. KING :
The linear antenna eighty years of progress.
Proc. I.E.E.E. - p. 2 à 16, Vol. 55 - January 1967.-

|21| H.E. KING, J.L. WONG :
An experimental study of a balun fed open sleeve dipole in front of a metallic reflector.
I.E.E.E. Trans. Antennas and Propagation, p. 201 à 204, March 1972.-

|22| P. LASSUDRIE, G. DUBOST, C. TERRET :
Mesure de la distribution de courant à la surface d'un doublet immergé dans un plasma chaud isotrope.
Compte-rendu à l'Académie des Sciences de Paris - Déc. 1972.

|23| LIANG-CHI SHEN :
Directivity and bandwith of single-band and double-band Yagi arrays.
I.E.E.E. Trans. Antennas and Propagation. P. 778 à 780 - November 1972.-

|24| K. K. MEI :
On the integral equations of thin wire antennas.
I.E.E.E. Trans. Antennas and Propagation - P. 374 à 378 - Vol. AP.13
May 1965.-

|25| G. F. MILLER :
Algorithms for special functions II.
Numerische Mathematik, P. 194 à 196, N° 7, 1965.-

|26| T. MORITA, C.E. FAFLICK :
The measurement of current distributions along coupled antennas and folded dipoles.
Proc. I.R.E - P. 1561 à 1565 - December 1951.-

|27| T.L. SIMPSON :
The theory of top-loaded antennas : Integral equations for the currents.
I.E.E.E. Trans. Antennas and Propagation - Vol. AP 17 - N° 2, March 1971.-

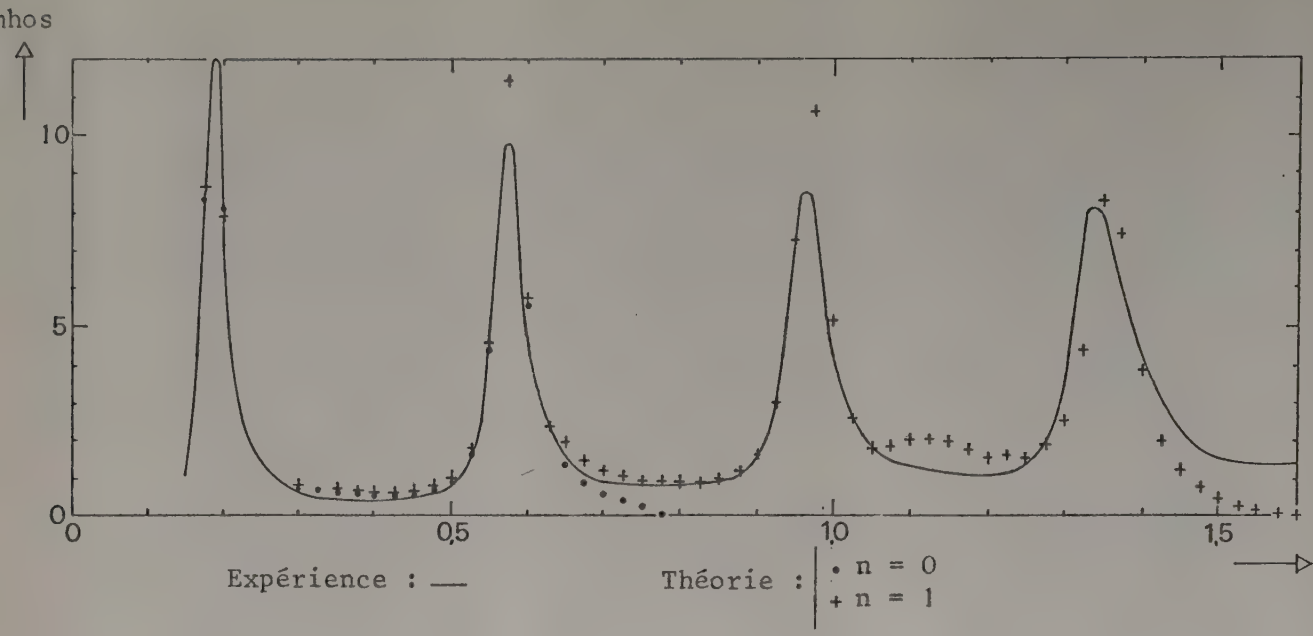
|28| G.A. THIELE :
Analysis of Yagi Uda type antennas.
I.E.E.E. Trans. Antennas and Propagation - Vol. AP 17 - N° 1 -
January 1969.-

|29| S. UDA :
Wireless beam of short electric waves
J. IEE (Japan) - p. 273 à 282 - March 1926
p. 1209 à 1219 - November 1927.-

|30| W. WALKINSHAW :
Theoretical treatment of short Yagi aerials.
J. I.E.E (London) - p. 598 à 599 - Part 3A - Vol. 93 - N° 1 - 1946.-

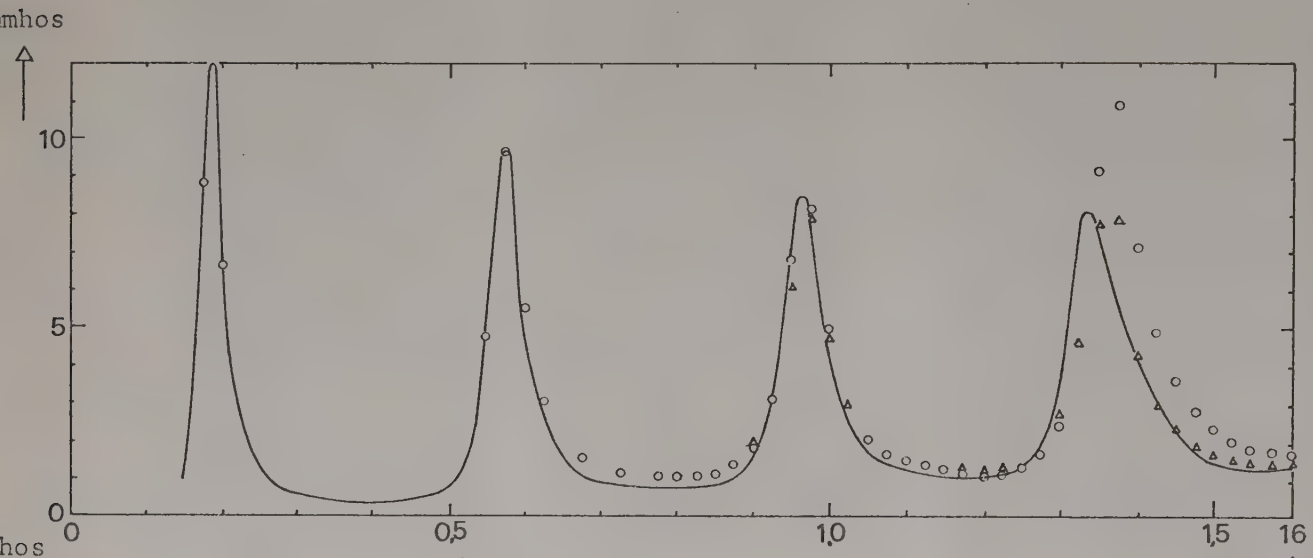
|31| H. YAGI :
Beam transmission of ultra-short waves
Proc. IRE - p. 715 à 741 - Vol 16 - June 1928.-

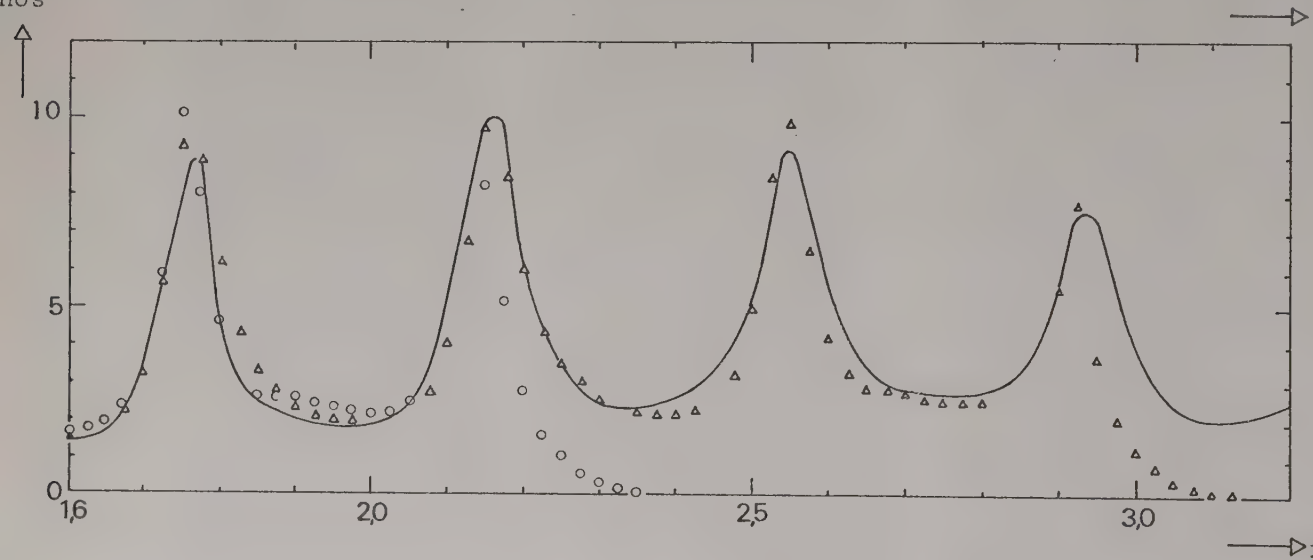
|32| T.T. WU and R.W.P. KING
Driving-point and input admittance of linear antennas.
J. Appl. Phys. p. 74 à 76 - n° 30 - 1959.



Expérience : —

Théorie : • n = 0
+ n = 1





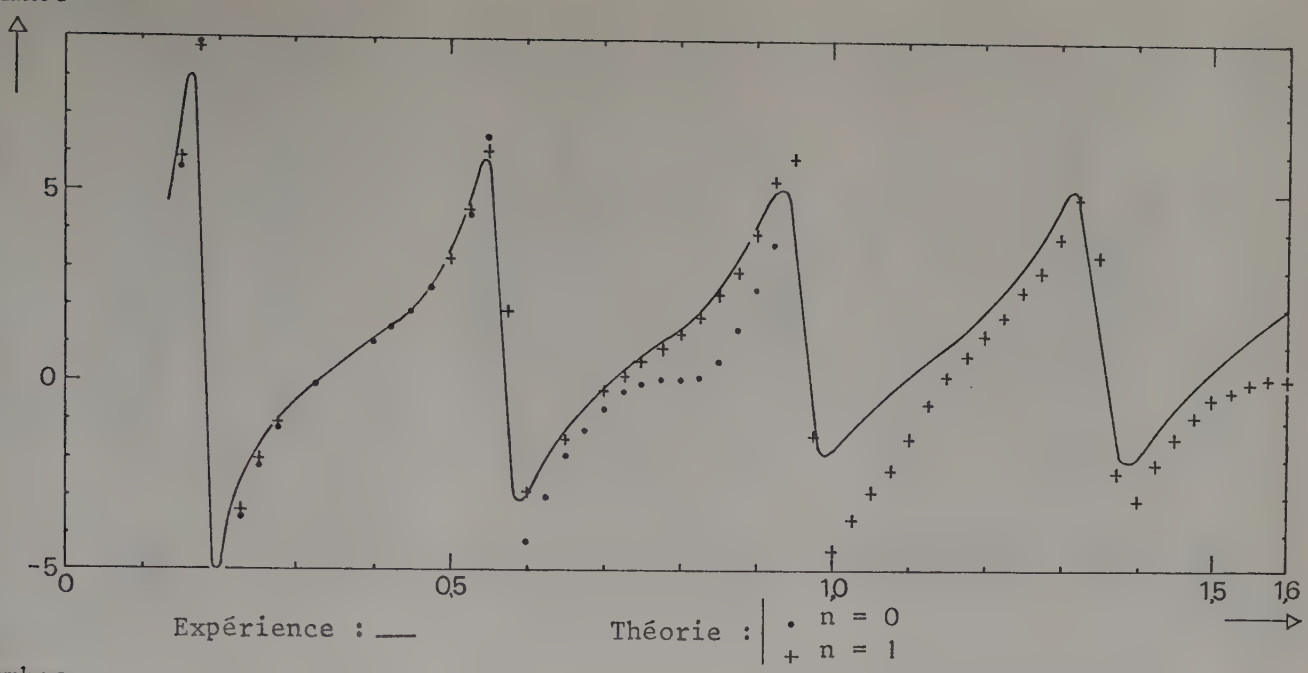
Expérience : —

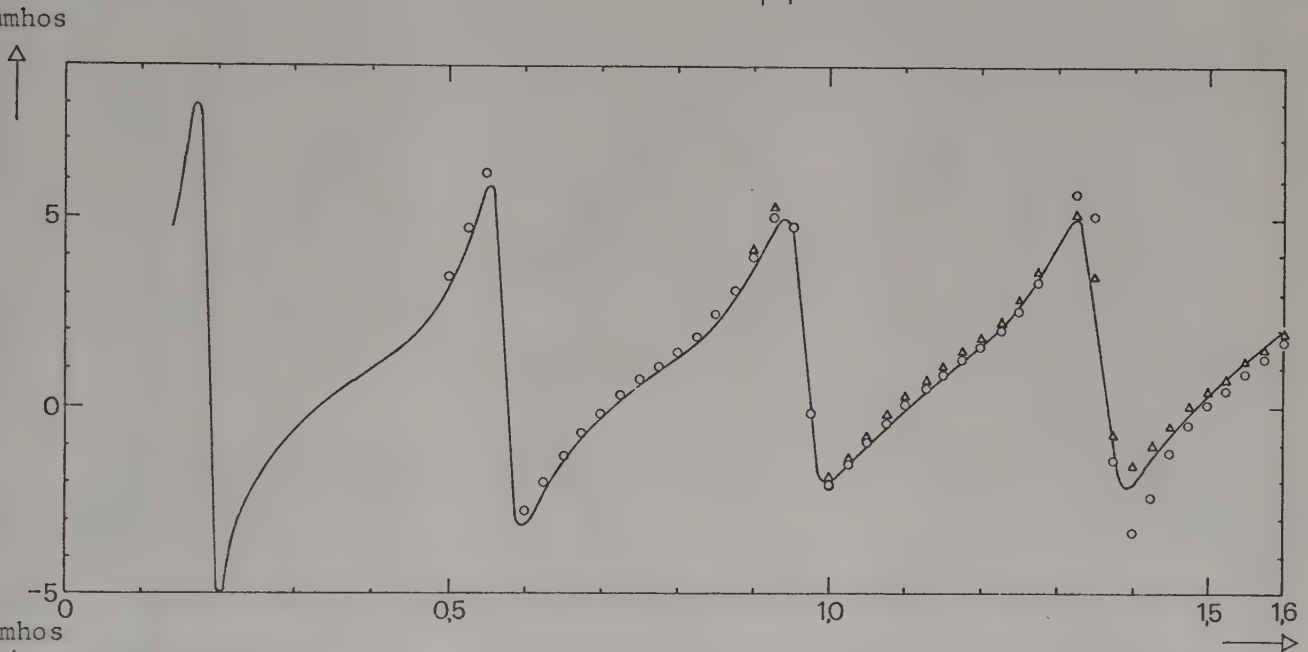
Théorie : ○ n = 2
△ n = 3

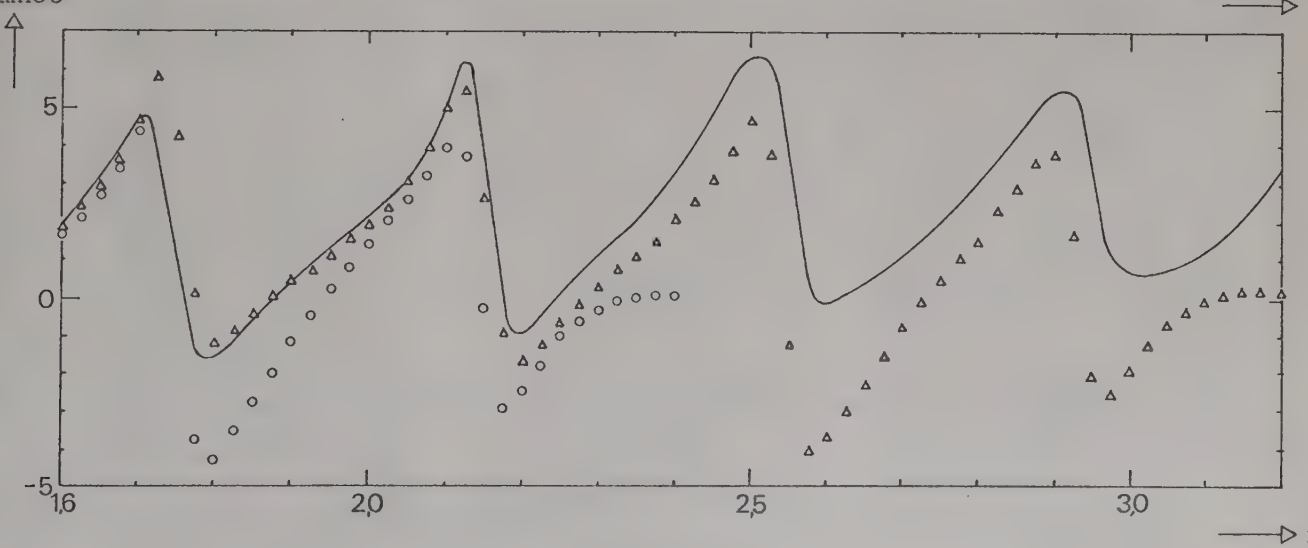
Conductance d'un doublet de longueur moyenne

h = 381 mm a = 1,5 mm soit $\Omega \simeq 12,5$

Fig. I-a





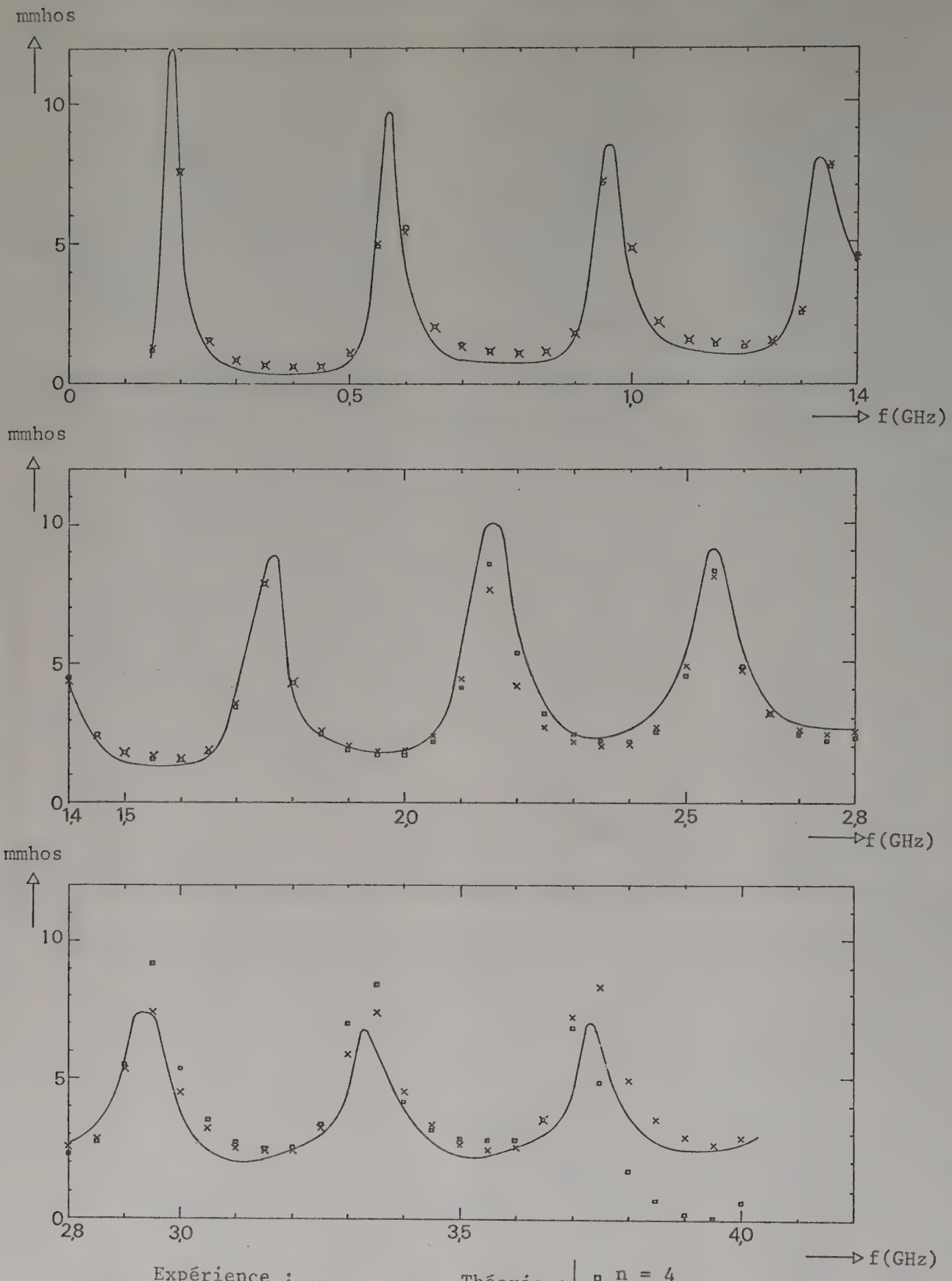


Expérience : — Théorie : ○ n = 2, △ n = 3

Susceptance d'un doublet de longueur moyenne

h = 381 mm a = 1,5 mm soit $\Omega \simeq 12,5$

Fig. I-b

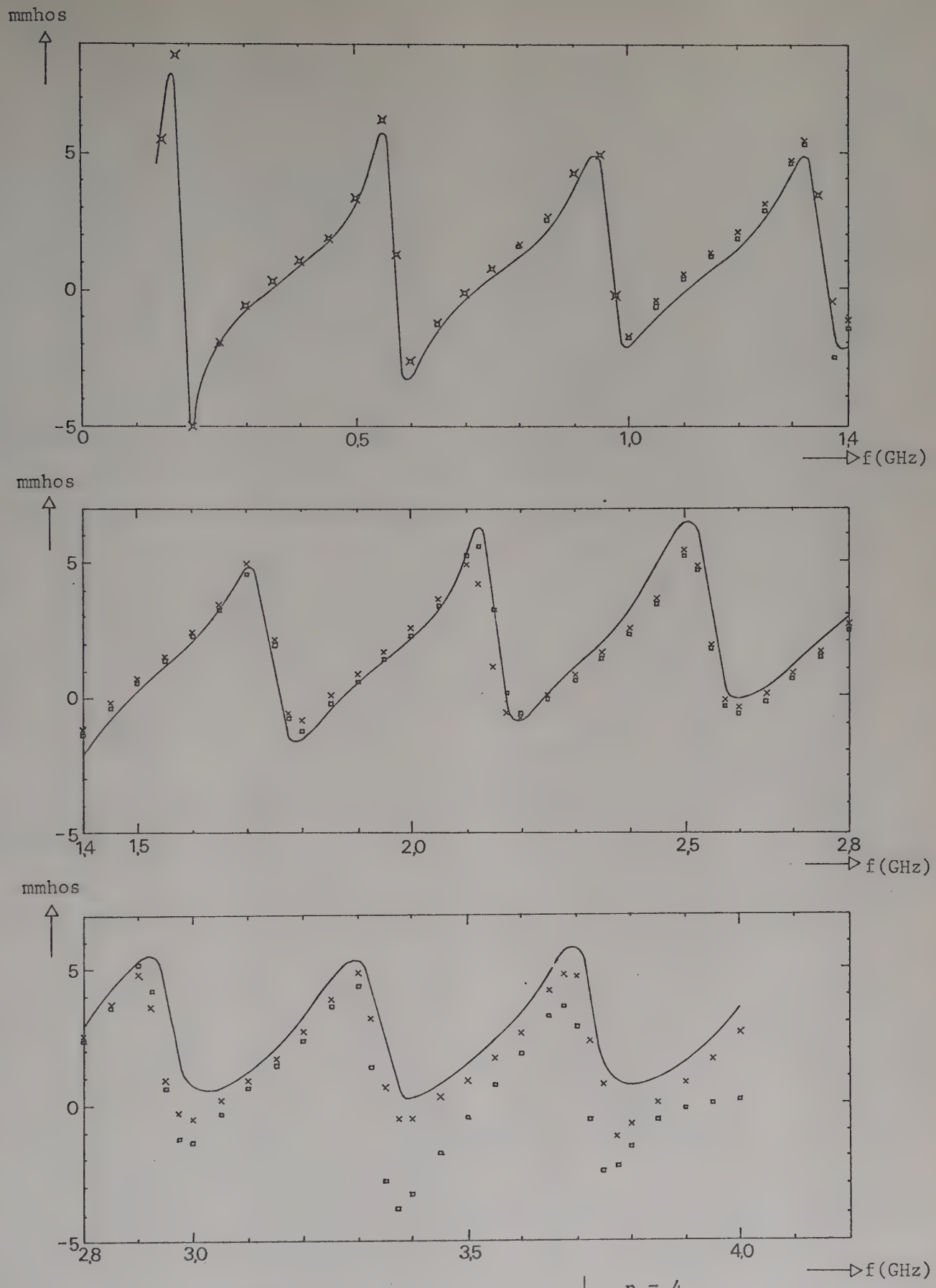


Expérience : —— Théorie : ▫ n = 4 × n = 5

Conductance d'un doublet de longueur moyenne

h = 381 mm a = 1,5 mm soit $\Omega \simeq 12,5$

Fig. I-c

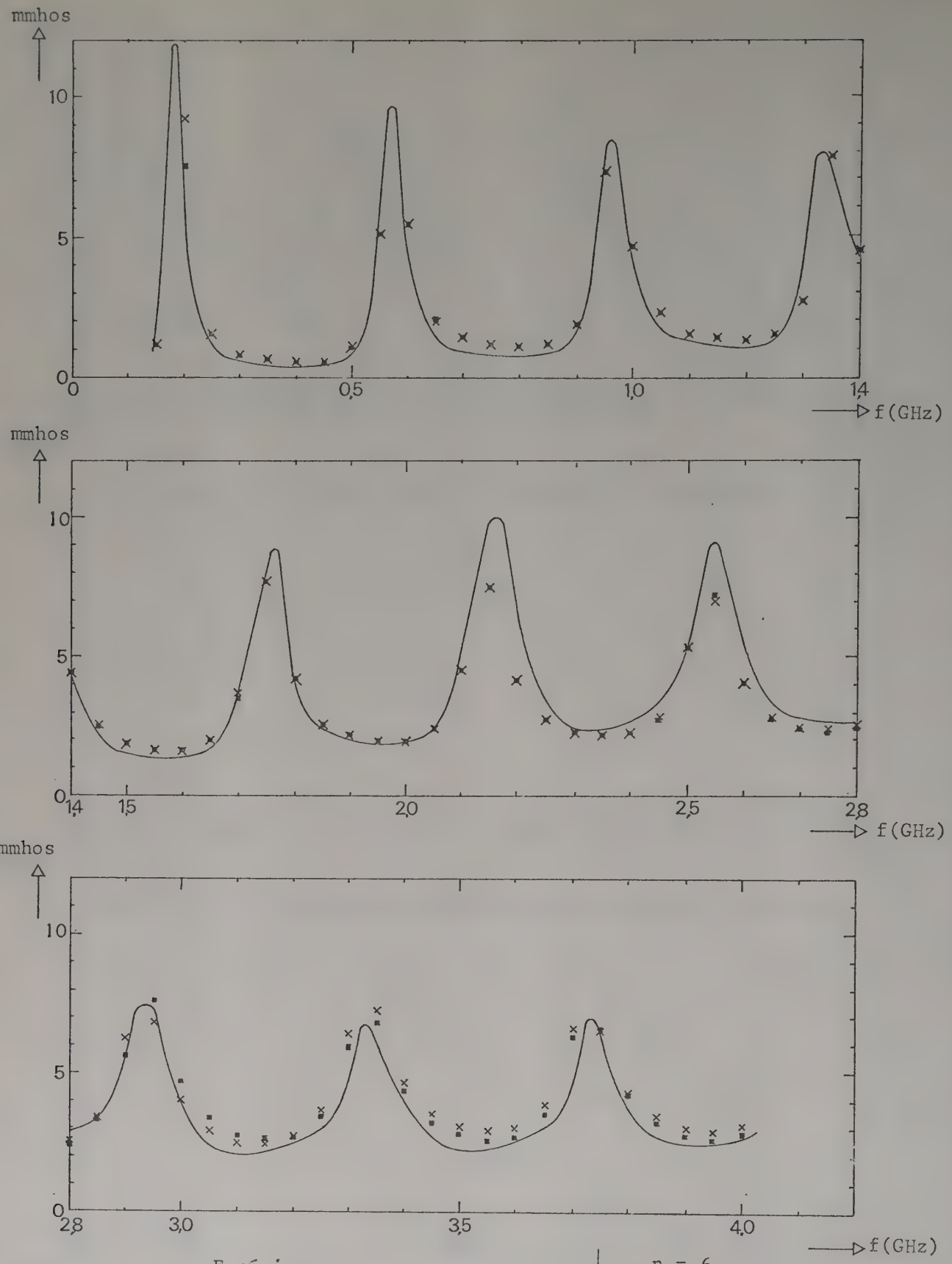


Expérience : — Théorie : ▫ n = 4 × n = 5

Susceptance d'un doublet de longueur moyenne

h = 381 mm a = 1,5 mm soit $\Omega \simeq 12,5$

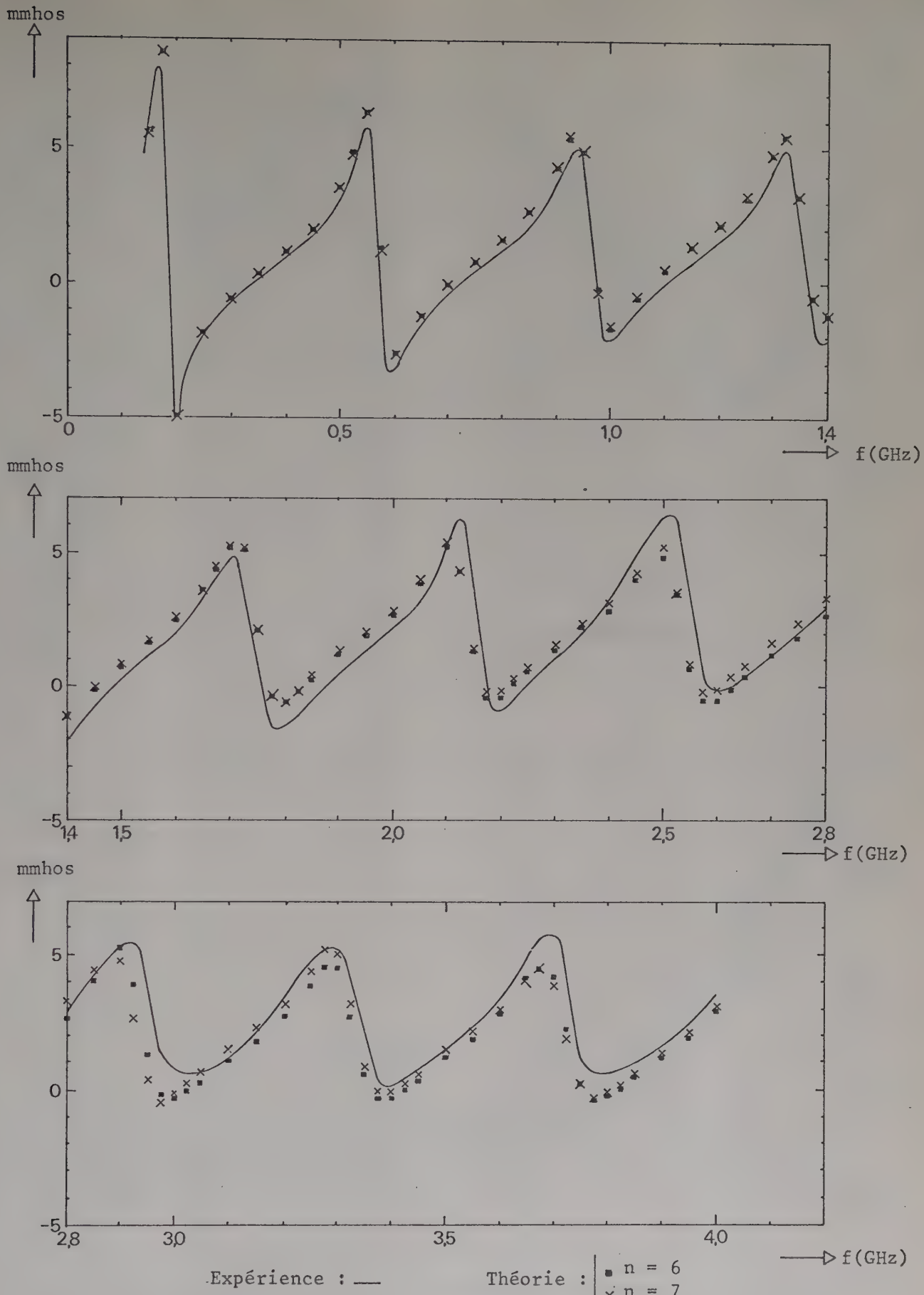
Fig. I-d



Conductance d'un doublet de longueur moyenne

h = 381 mm a = 1,5 mm soit $\Omega \simeq 12,5$

fig. I-e

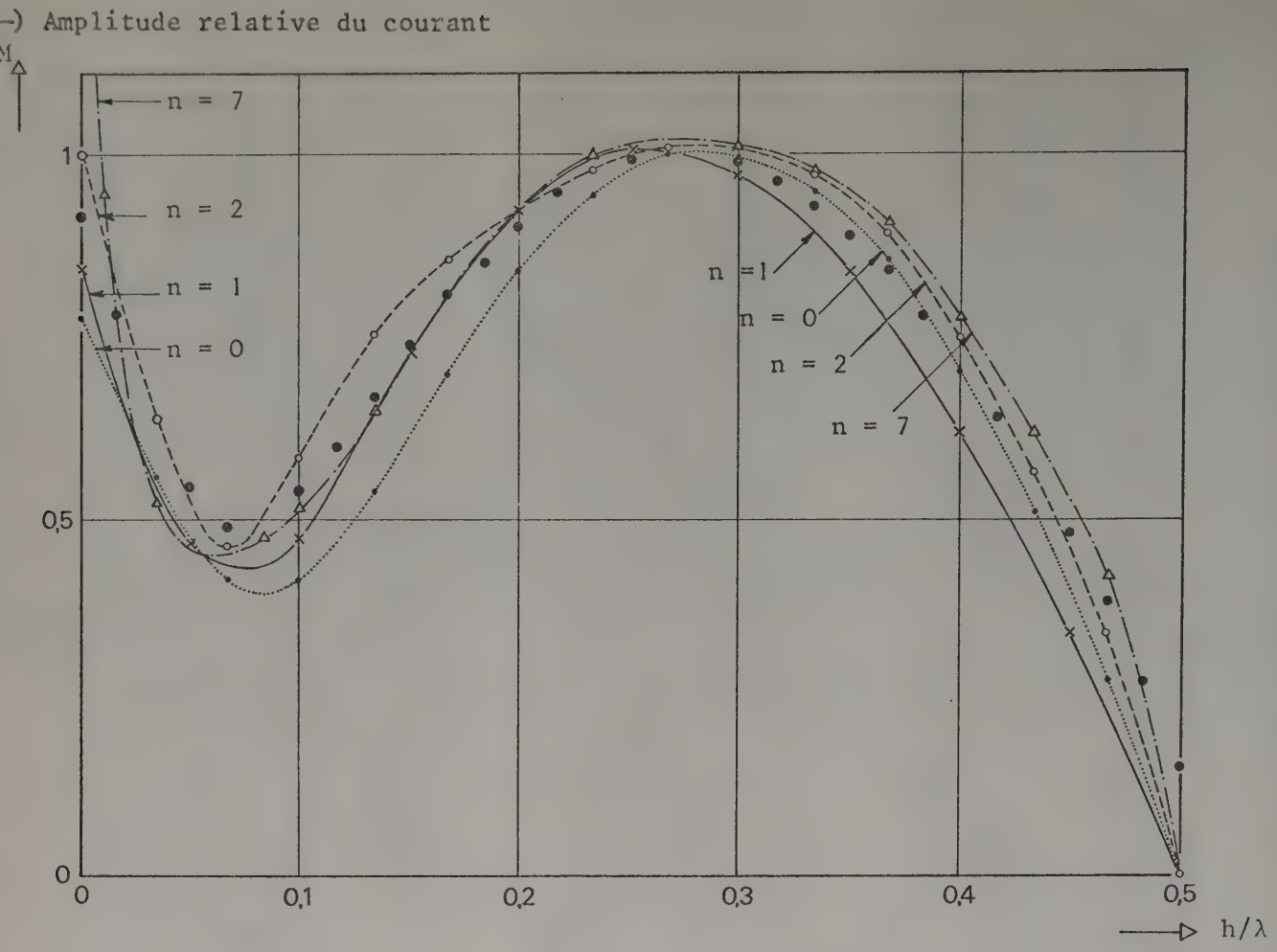


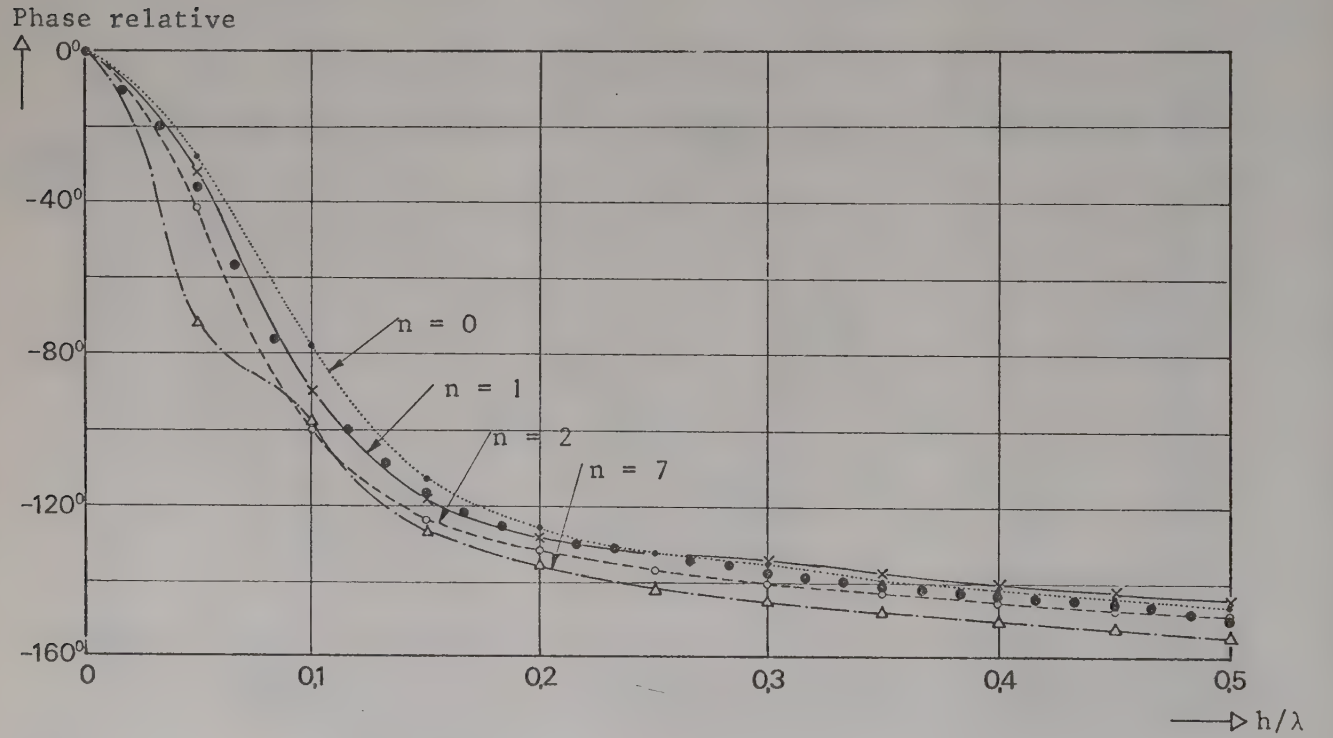
Expérience : —— Théorie : ▪ n = 6 ; × n = 7

Susceptance d'un doublet de longueur moyenne

h = 381 mm a = 1,5 mm soit $\Omega \simeq 12,5$

Fig. I-f



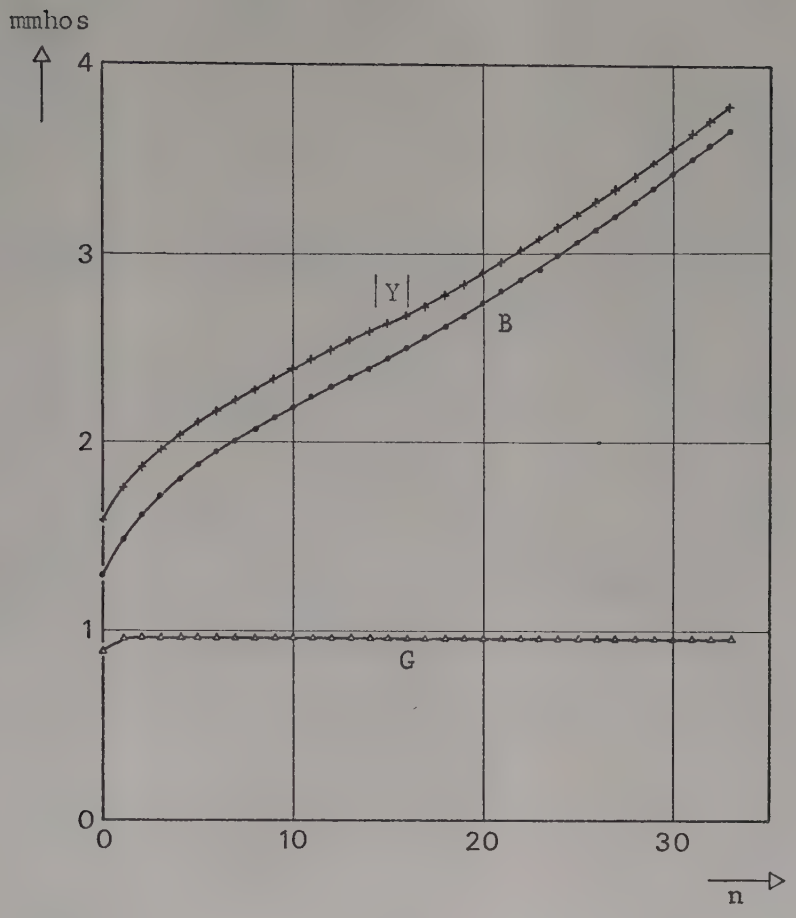


Comparaison des courants calculés avec les mesures expérimentales sur un demi-doublet (a = 3,5 mm, h = 150 mm).

n = 0 — n = 1 — n = 2

n = 7 — expérience

Fig. II-a



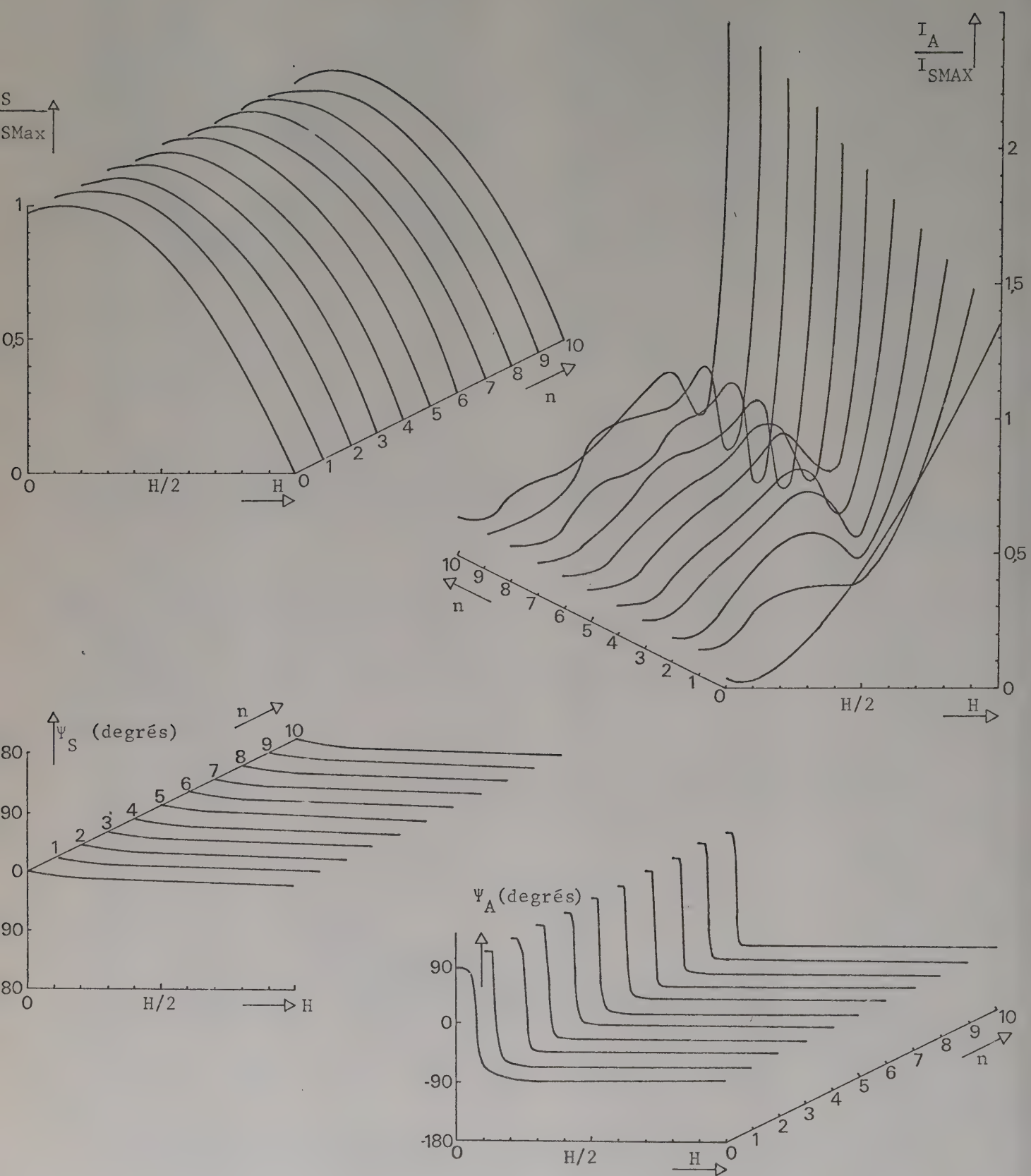
Courant à la base d'un doublet isolé, c'est-à-dire admittance de ce doublet en fonction du découpage.

$\beta h = \pi$; $\Omega = 10$ $\qquad Y = G + j\,B$

G : conductance
B : susceptance

Les courbes reliant les points n'ont évidemment pas de signification physique puisque le nombre n de découpage est un nombre entier.

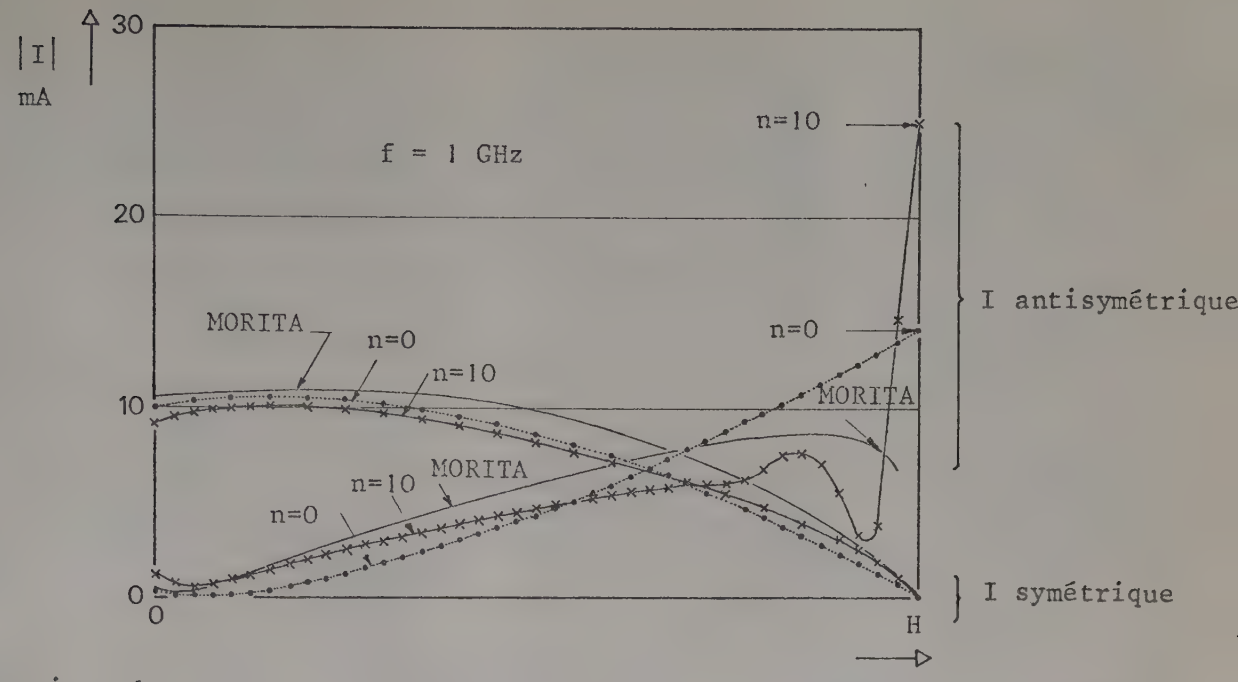
Fig. II-b



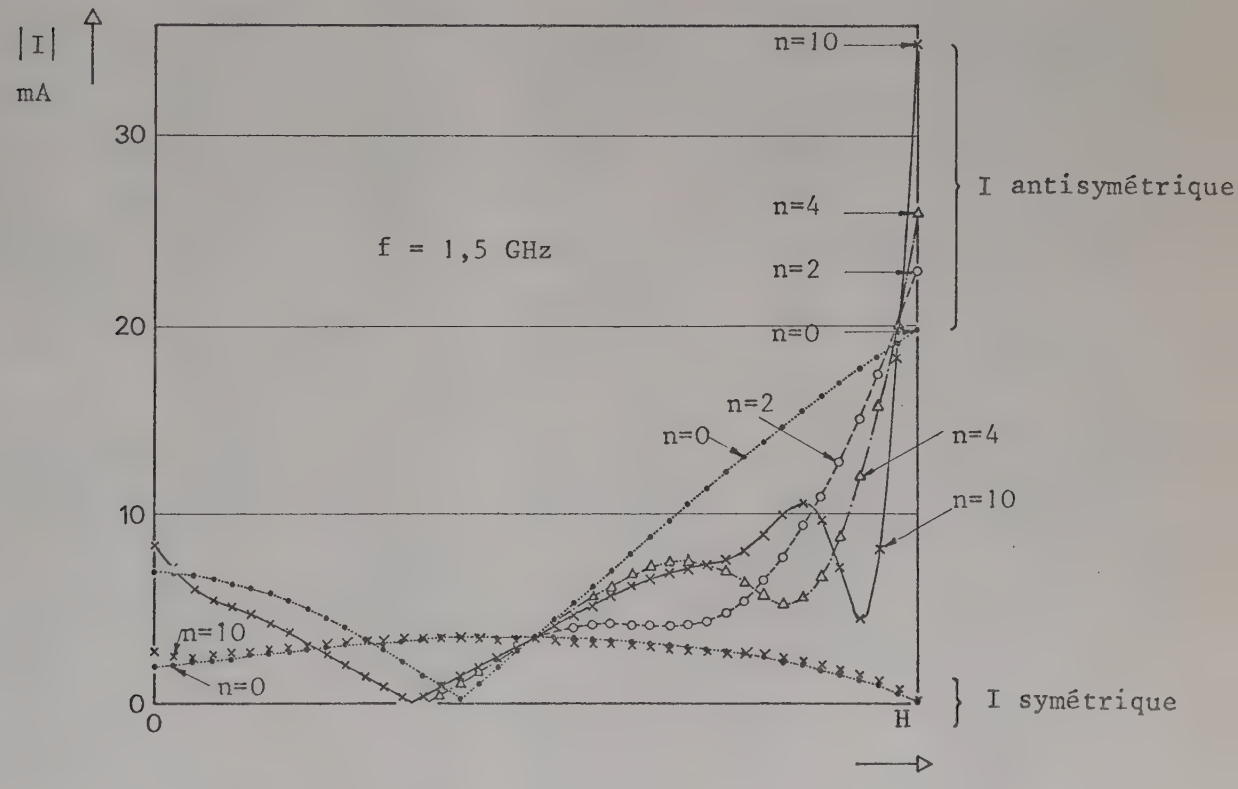
I_S, Ψ_S module et phase relative de la partie symétrique des courants.

I_A, Ψ_A module et phase relative de la partie antisymétrique des courants.

Fig. III.a

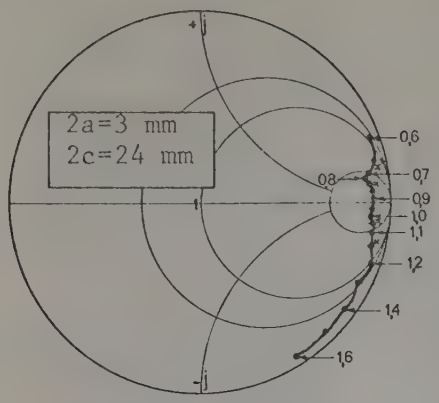


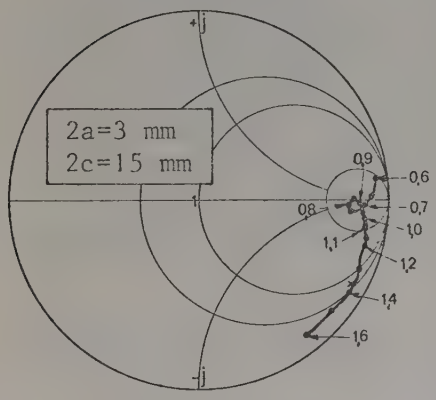
Comparaison des mesures de courants de MORITA et des calculs pour le doublet replié : h = 75 mm ; b = 12 mm ; a = c = 1,21 mm.

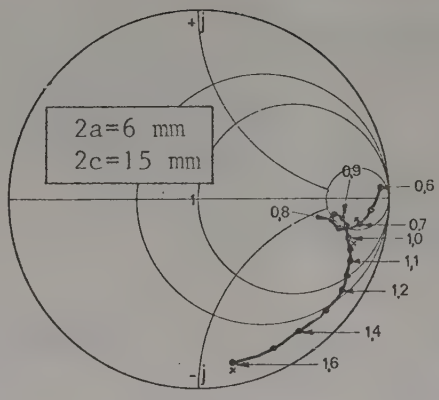


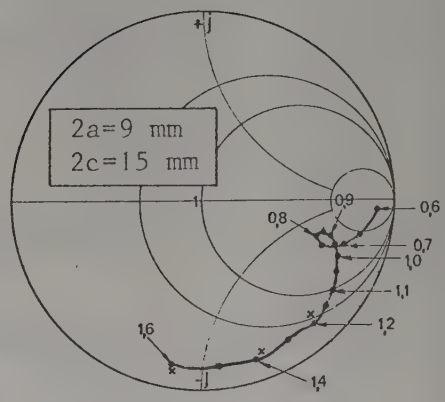
Stabilité à une autre fréquence

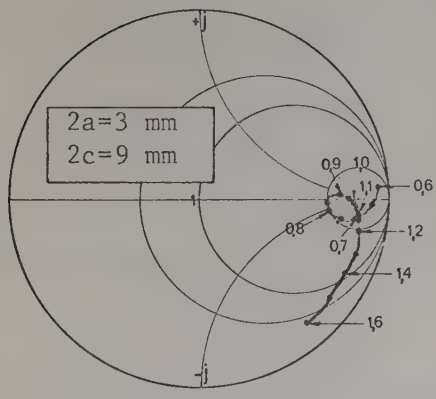
Fig. III-b

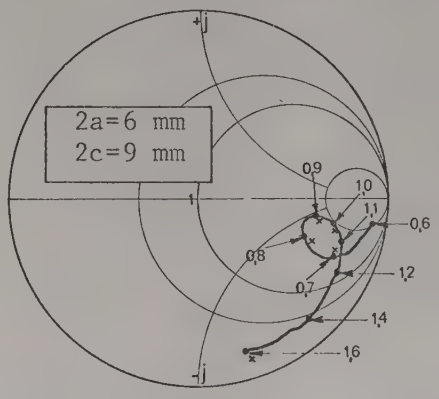

2a=3 mm
2c=24 mm
+j
-j
1
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
1,1
1,2
1,4
1,6

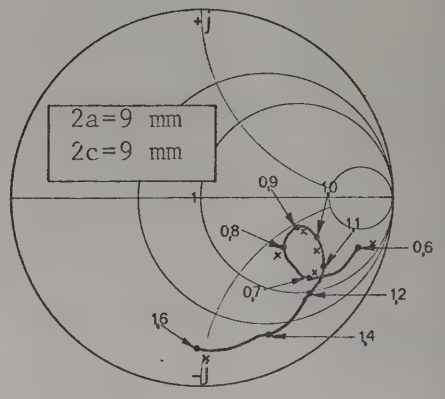

2a=3 mm
2c=15 mm
+j
-j
1
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
1,1
1,2
1,4
1,6

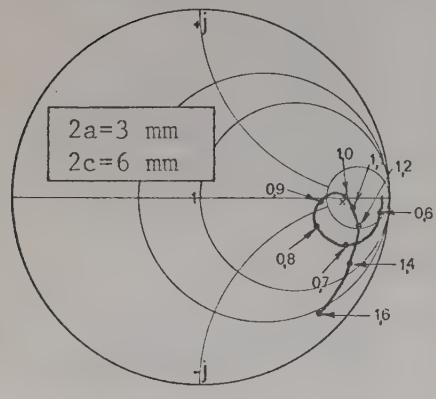

2a=6 mm
2c=15 mm
+j
-j
1
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
1,1
1,2
1,4
1,6

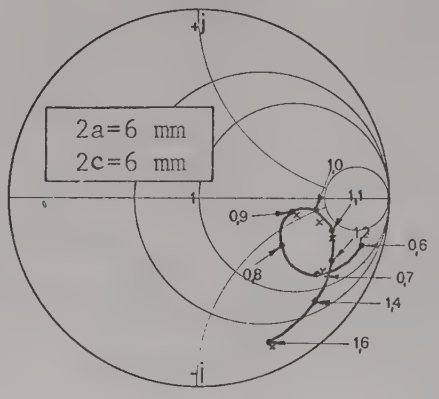

2a=9 mm
2c=15 mm
+j
-j
1
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
1,1
1,2
1,4
1,6

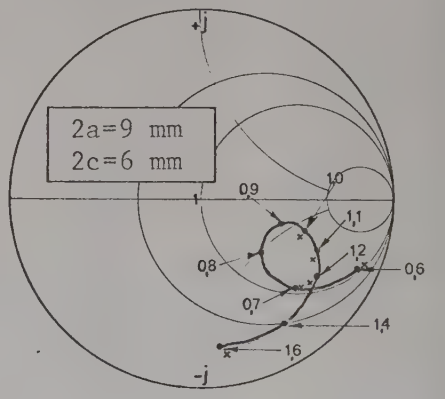

2a=3 mm
2c=9 mm
+j
-j
1
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
1,1
1,2
1,4
1,6

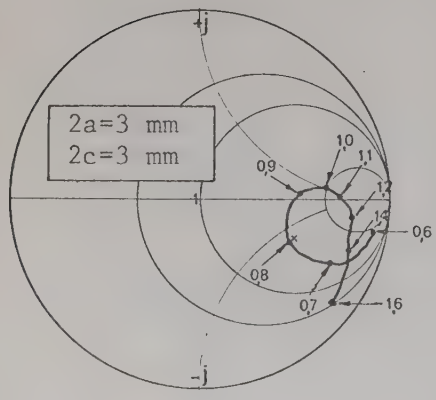

2a=6 mm
2c=9 mm
+j
-j
1
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
1,1
1,2
1,4
1,6

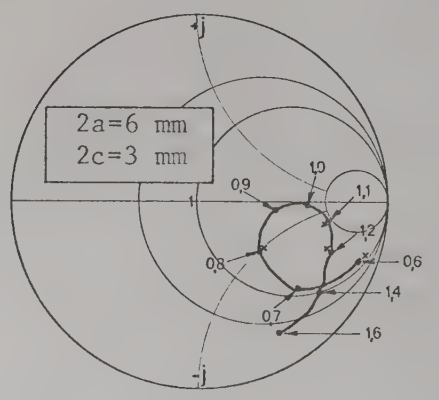

2a=9 mm
2c=9 mm
+j
-j
1
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
1,1
1,2
1,4
1,6

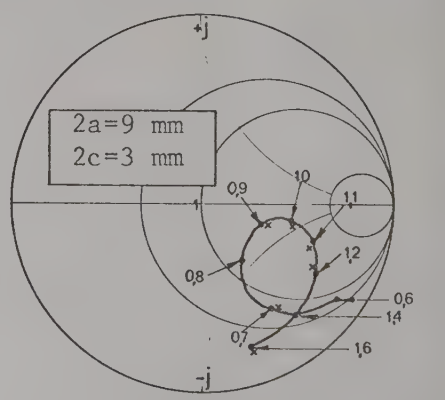

2a=3 mm
2c=6 mm
+j
-j
1
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
1,1
1,2
1,4
1,6


2a=6 mm
2c=6 mm
+j
-j
1
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
1,1
1,2
1,4
1,6


2a=9 mm
2c=6 mm
+j
-j
1
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
1,1
1,2
1,4
1,6


2a=3 mm
2c=3 mm
+j
-j
1
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
1,1
1,2
1,4
1,6


2a=6 mm
2c=3 mm
+j
-j
1
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
1,1
1,2
1,4
1,6

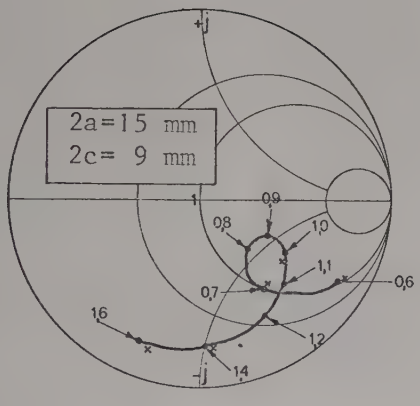

2a=9 mm
2c=3 mm
+j
-j
1
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
1,1
1,2
1,4
1,6

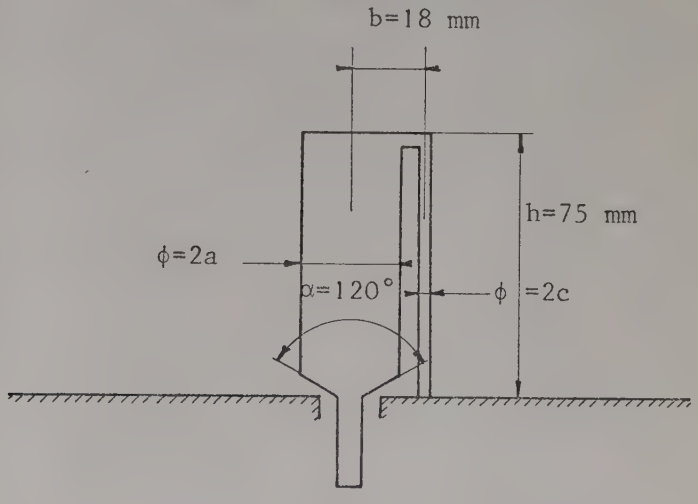
Allures d'impédance de demi-doublets repliés au-dessus d'un plan conducteur. Les abaques de Smith sont rapportées à 50 Ω.

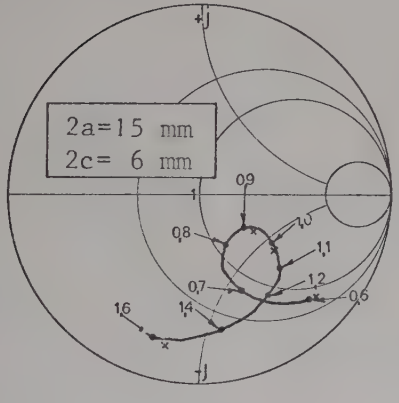
Les courbes sont paramétrées en fréquence (GHz).

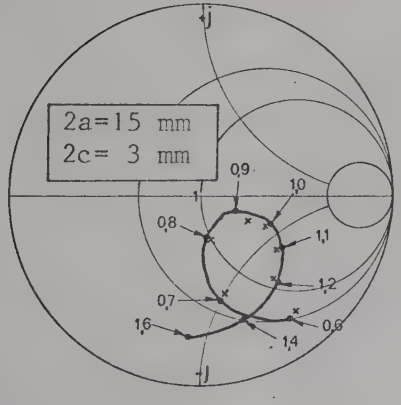
- courbes mesurées
- × points de calculs

(Les points de calculs qui n'apparaissent pas sur certains abaques sont pratiquement confondus avec les points de mesure).









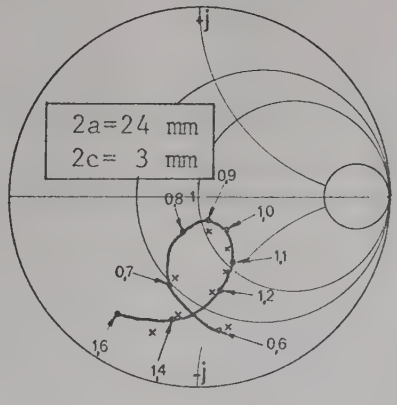
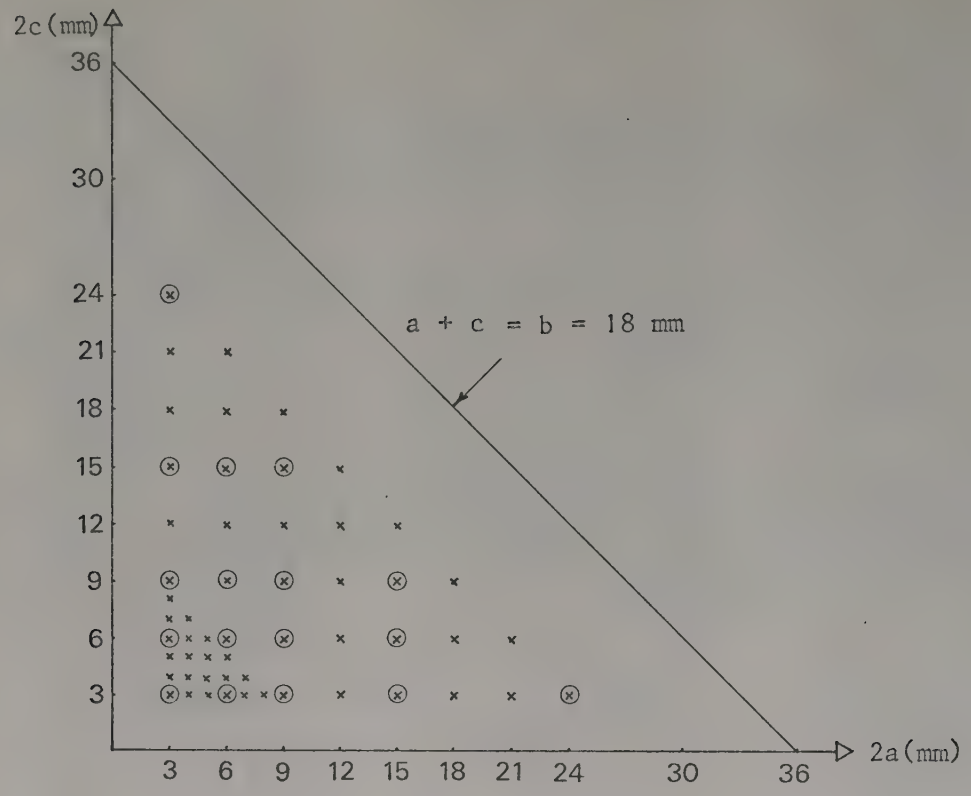
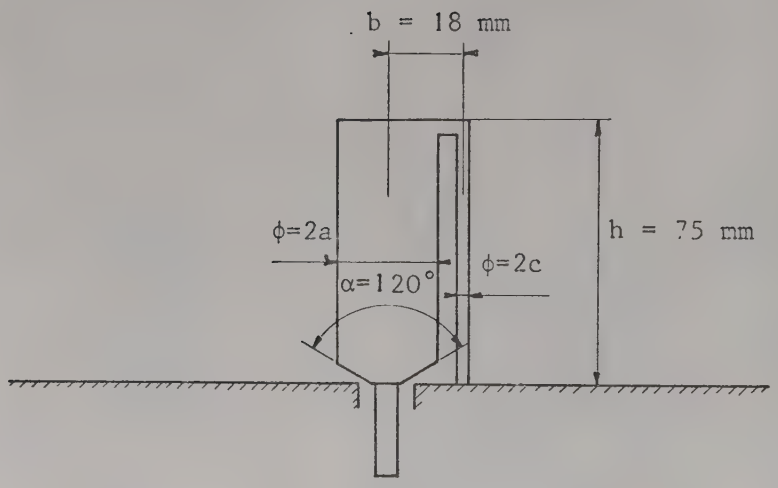


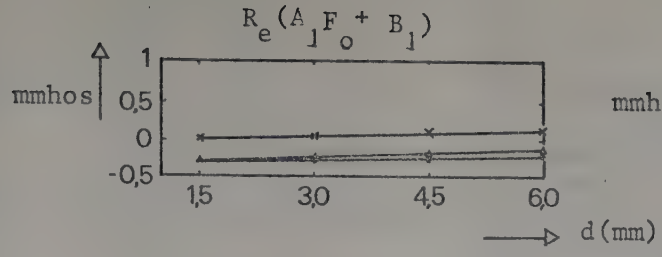
Fig. IV-a

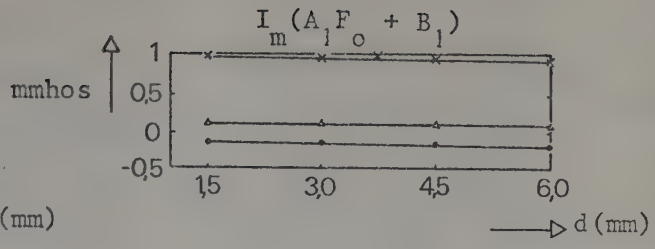


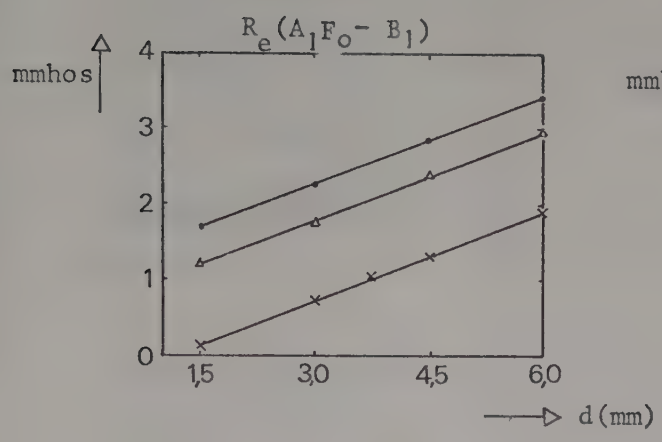


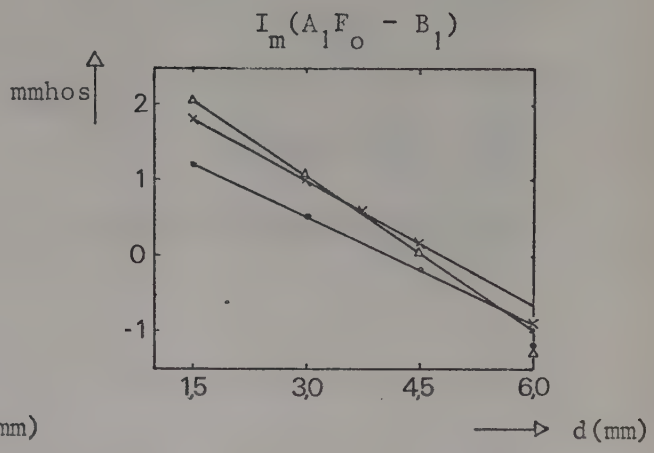
Distribution des maquettes étudiées en fonction des diamètres des brins.
Les points entourés sont présentés dans le tableau précédent.

Fig. IV-b



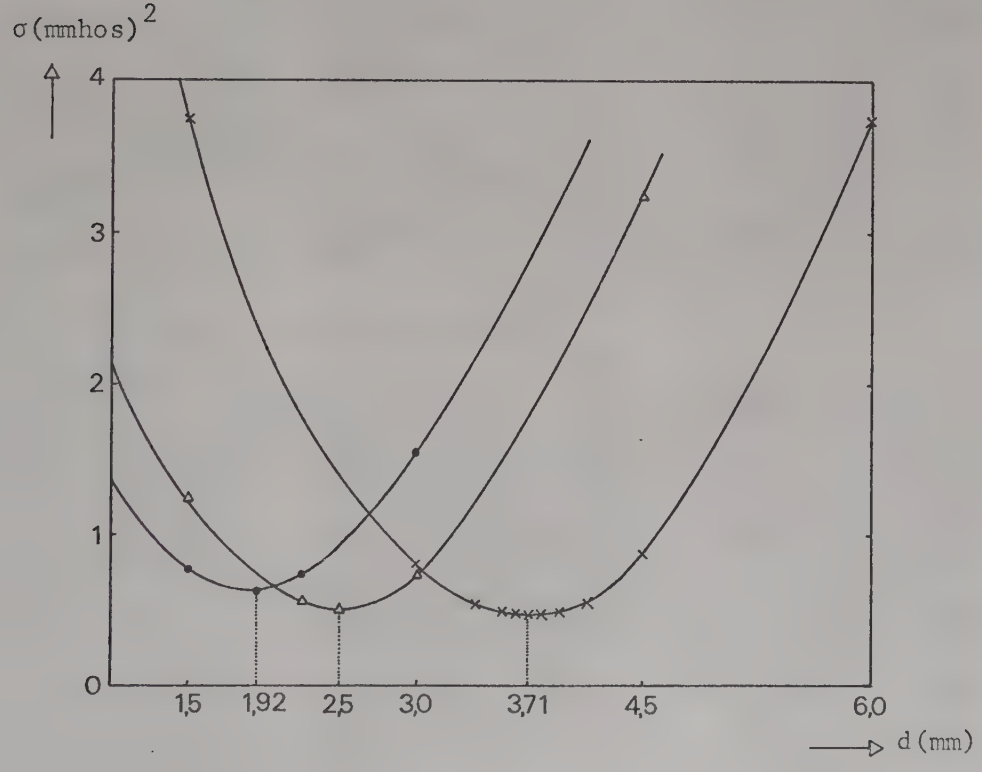






R_e : partie réelle

I_m : partie imaginaire



Calcul des corrections sur un cas

× n = 0

△ n = 1

• n = 2

h = 75 mm

b = 18 mm

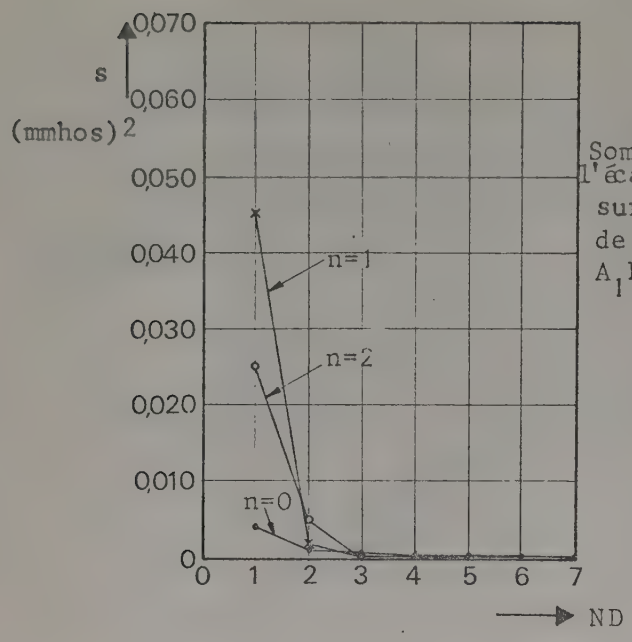
a = 4,5 mm

c = 1,5 mm

$$\sigma = \sum_{i=1}^{17} \left| Y_c(i) + A_1 F(i) + B_1 - Y_m(i) \right|^2$$

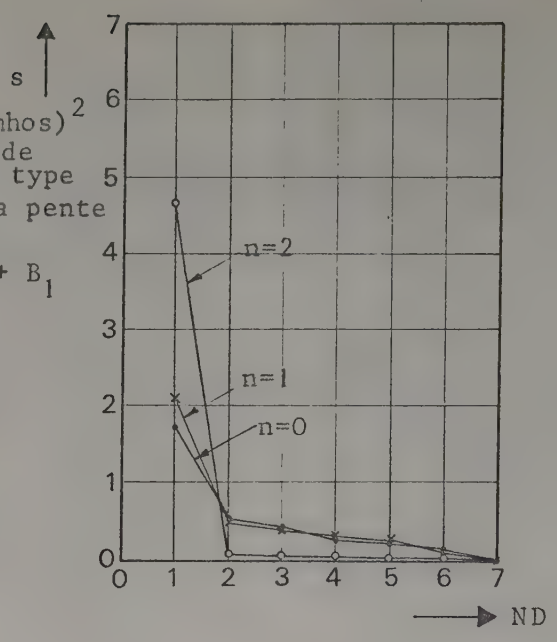
Fig. V

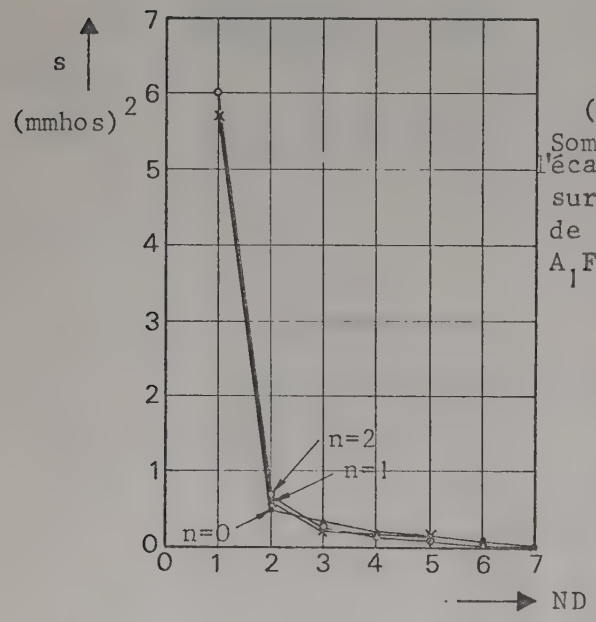
Partie réelle



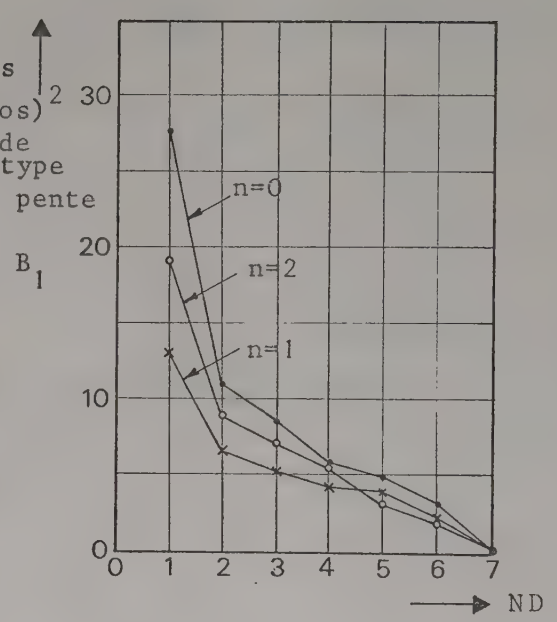
Somme de l'écart type sur la pente de : $A_1F_o + B_1$

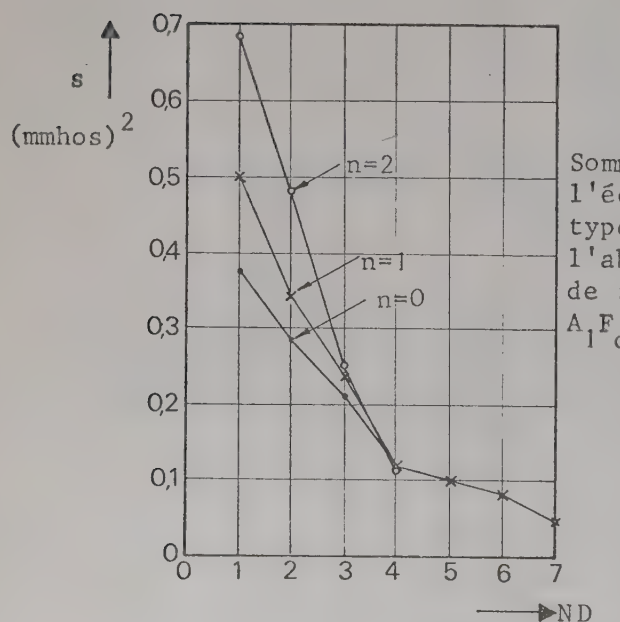
Partie imaginaire





Somme de l'écart type sur la pente de : $A_1F_o - B_1$





Somme de l'écart type sur l'abscisse de : $A_1F_o + B_1$

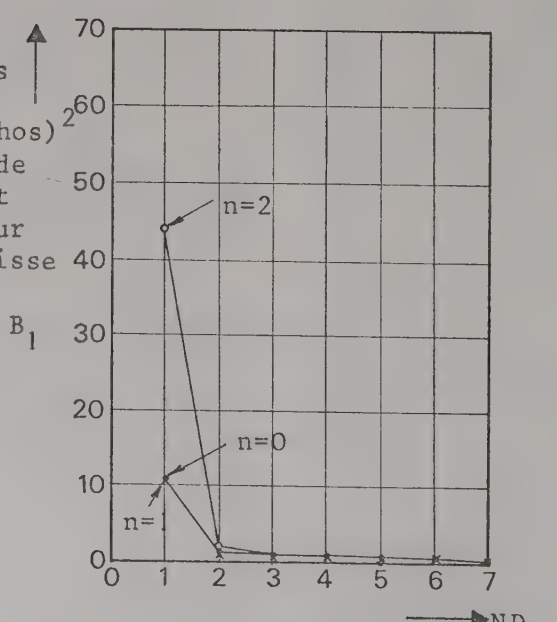
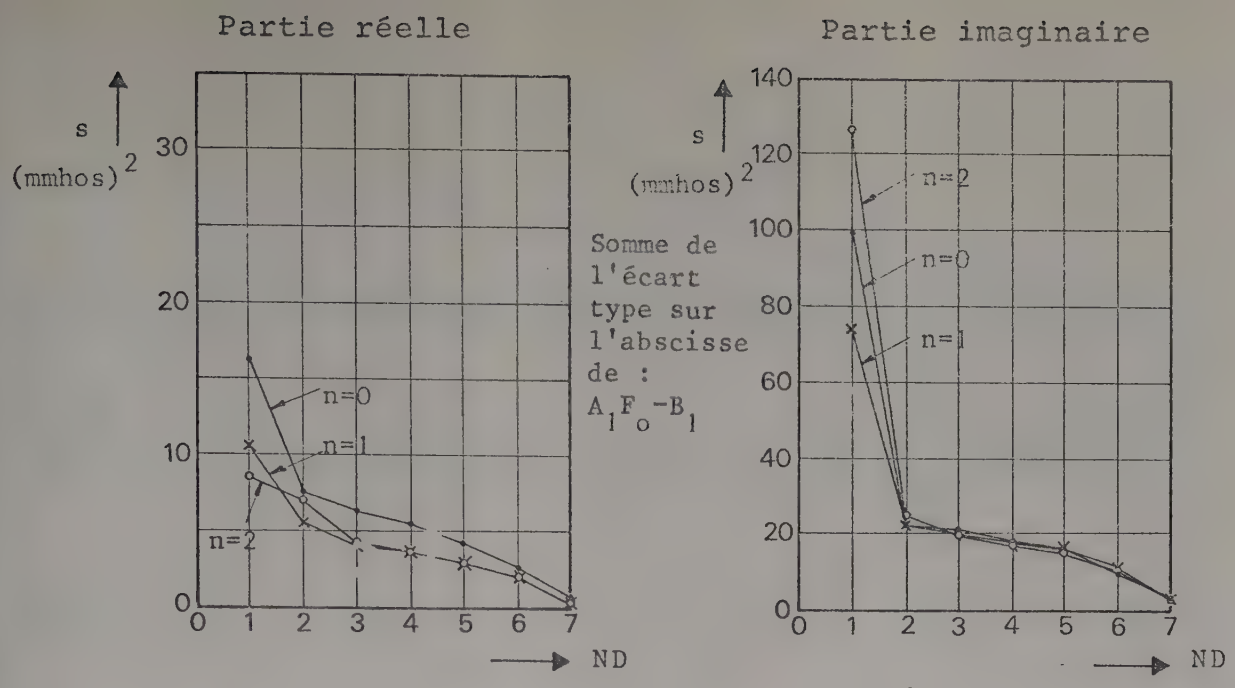
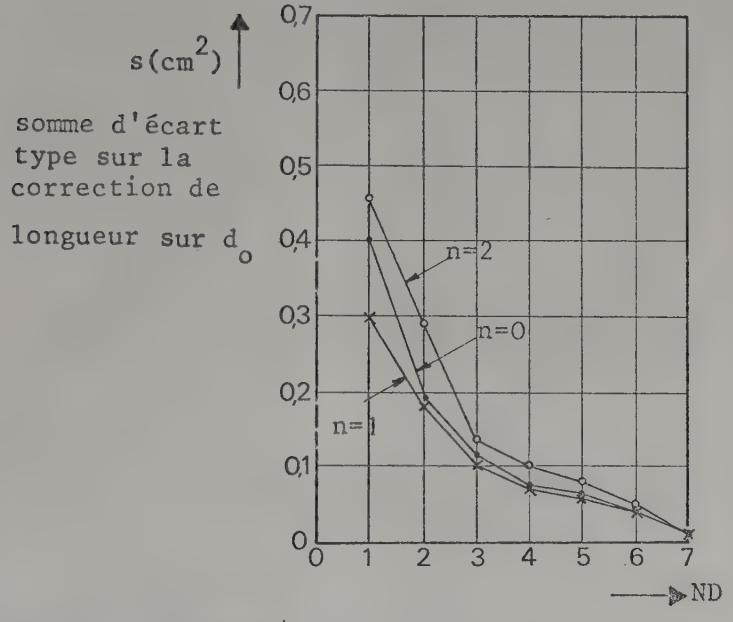


Fig. VI





Recherche de lois empiriques de correction.

Variation des sommes d'écart type : $s(ND) = \sum_{i=1}^{NP} (z_i - P_{ND}(x_i ; y_i))^2$

en fonction du degré ND du polynome d'approximation

$A_1 F_o + B_1$ et $A_1 F_o - B_1$ en mmhos

n : nombre de découpage

- . n = 0
- × n = 1
- o n = 2

Fig. VI

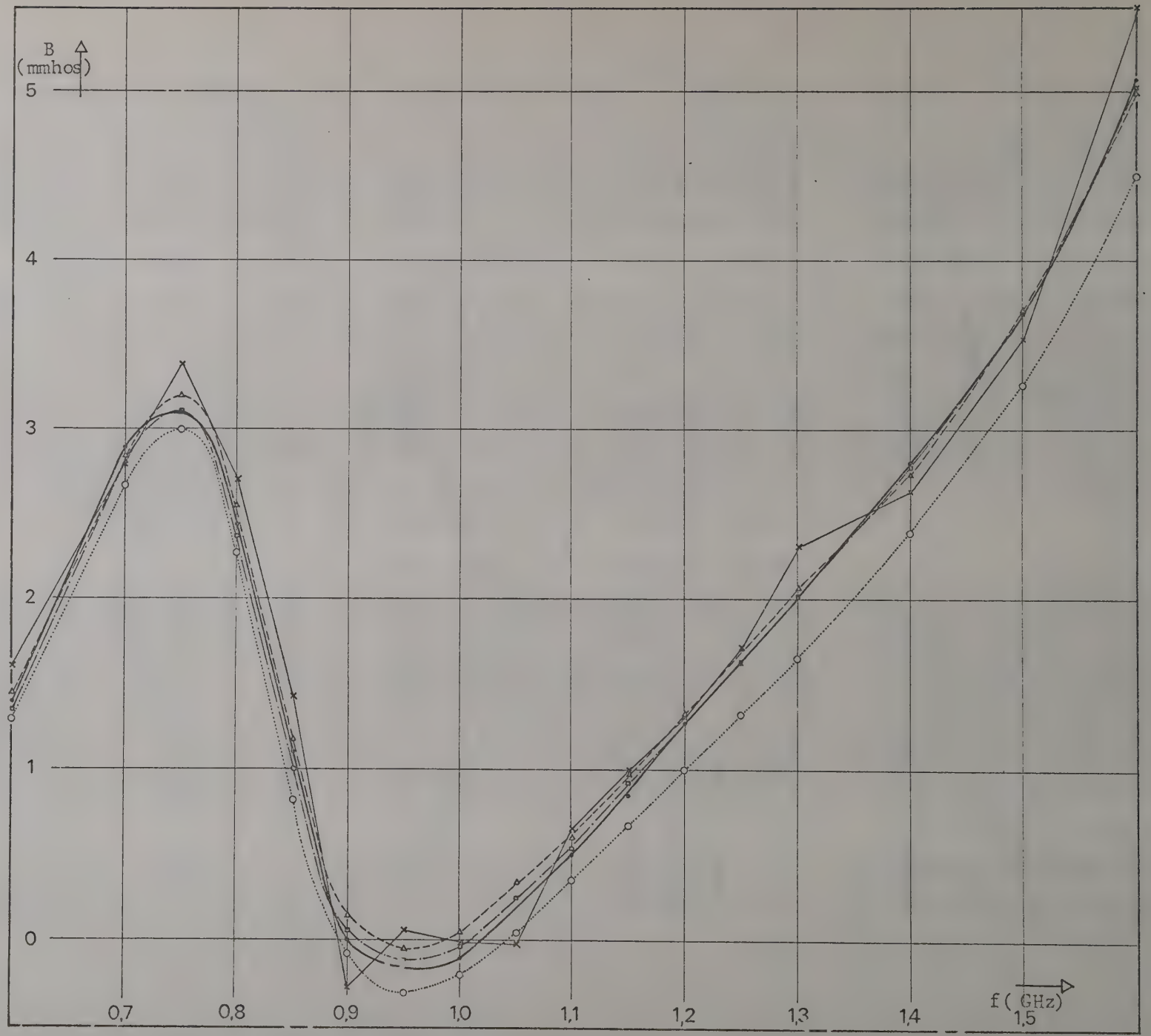
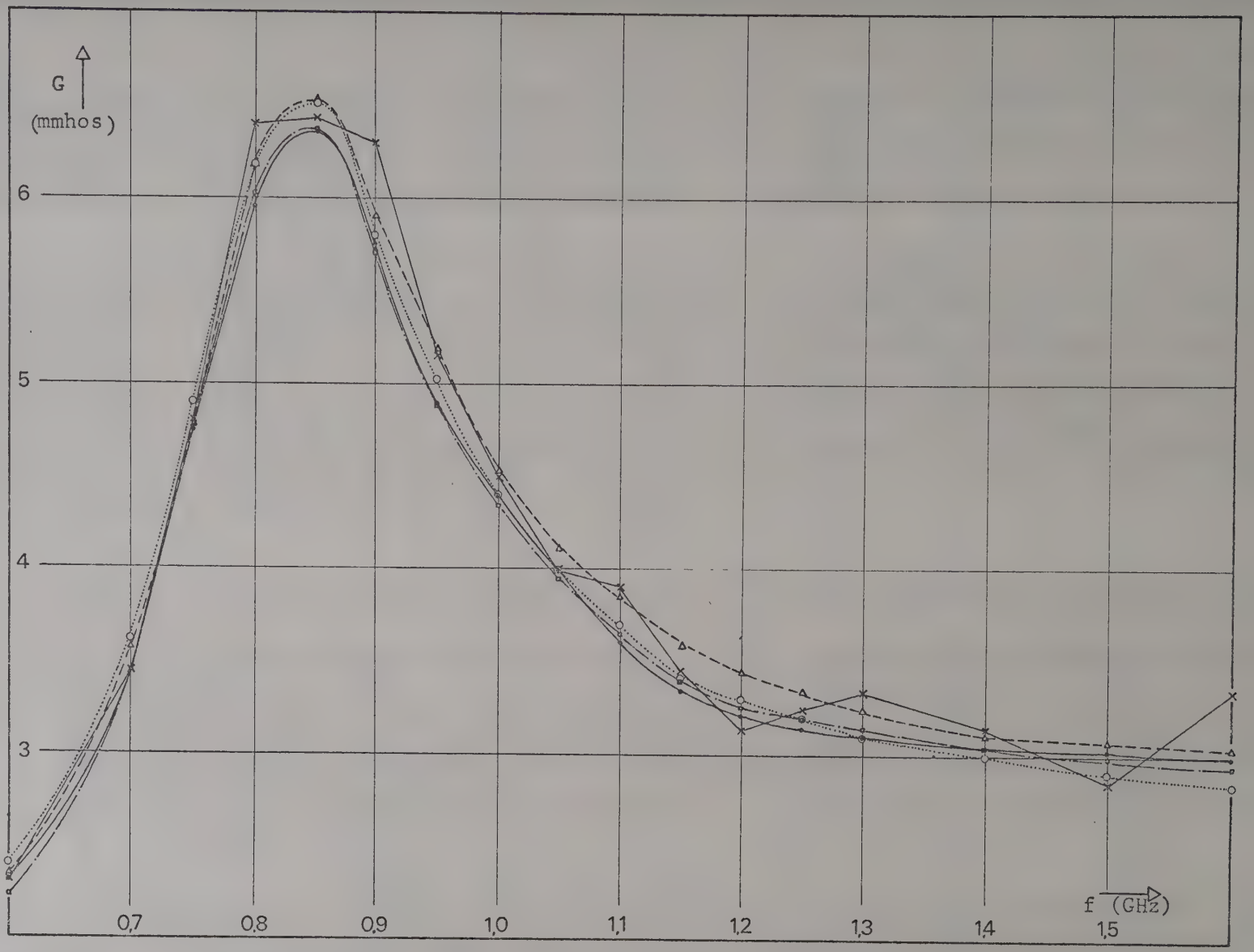


Fig. VII-a



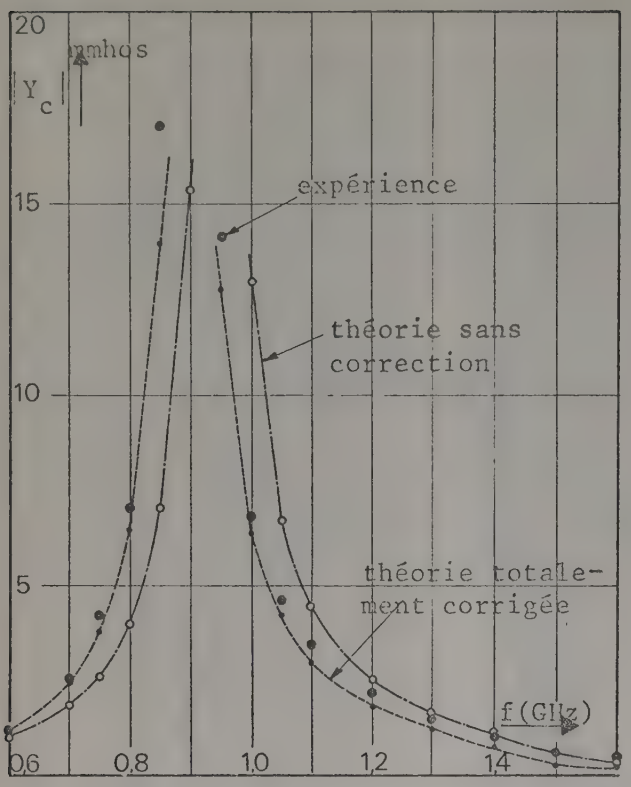
Admittance d'un doublet replié ; Y = G + j B. h = 75 mm , b = 18 mm, a =2,5 mm, c = 1,5 mm.
Comparaison entre deux procédés de mesure, et les calculs correspondants.

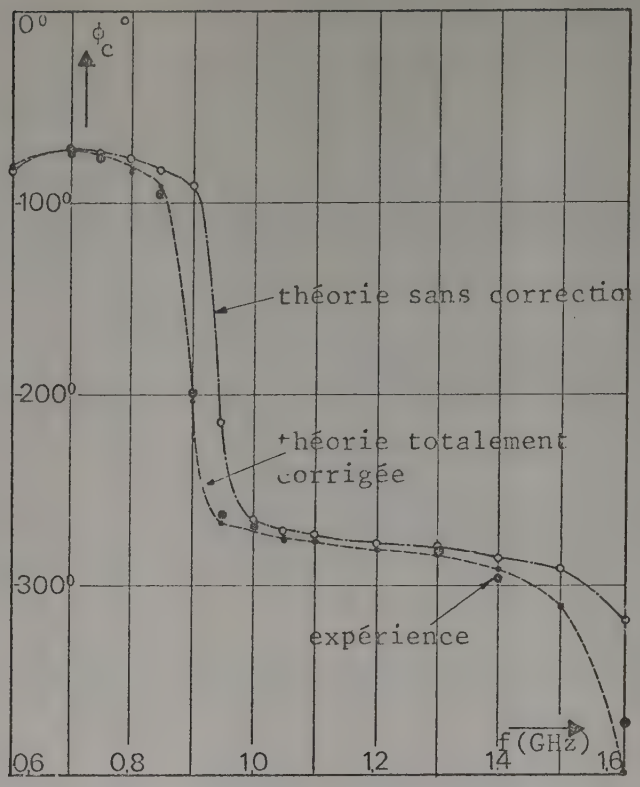
1 le réflectomètre ——•—— et les calculs qui s'en déduisent ——•·—•——

2 le mesureur de paramètre en S ——×—— et les calculs correspondants ——△---△——

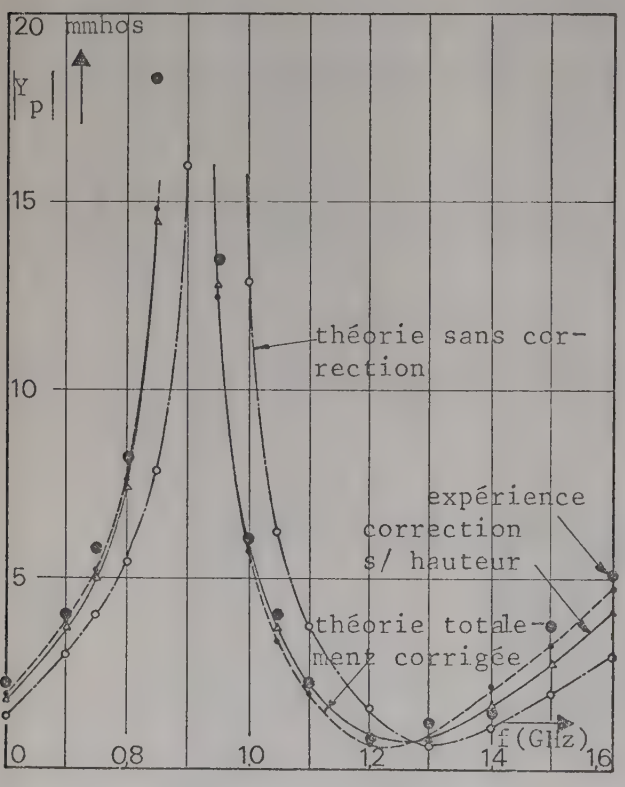
La courbe marquée : ——o·····o—— correspond à un calcul comportant seulement une correction sur la hauteur.

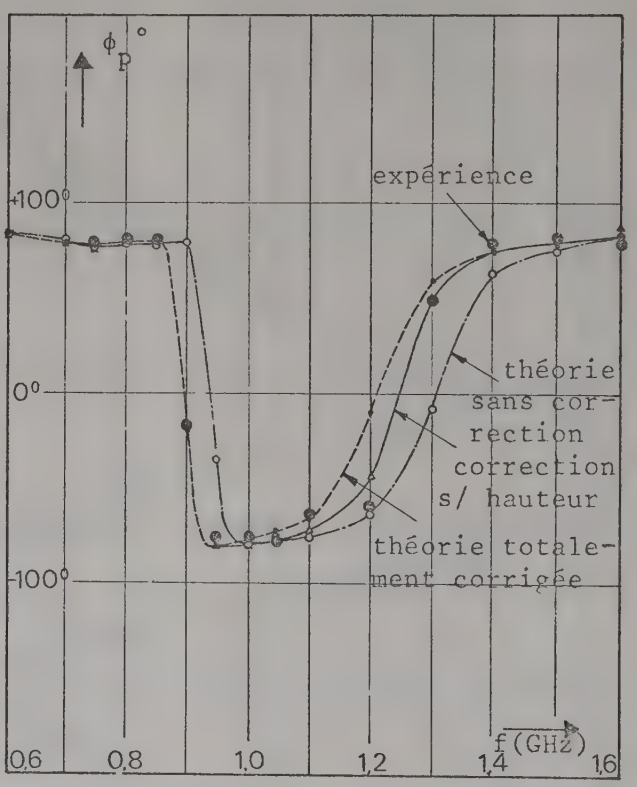
Fig. VII - a





d = 1,5 cm

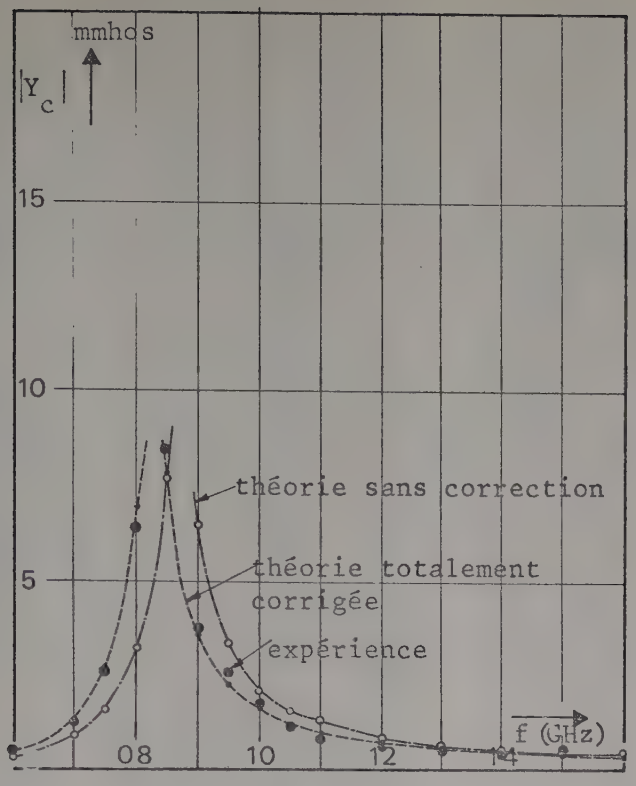


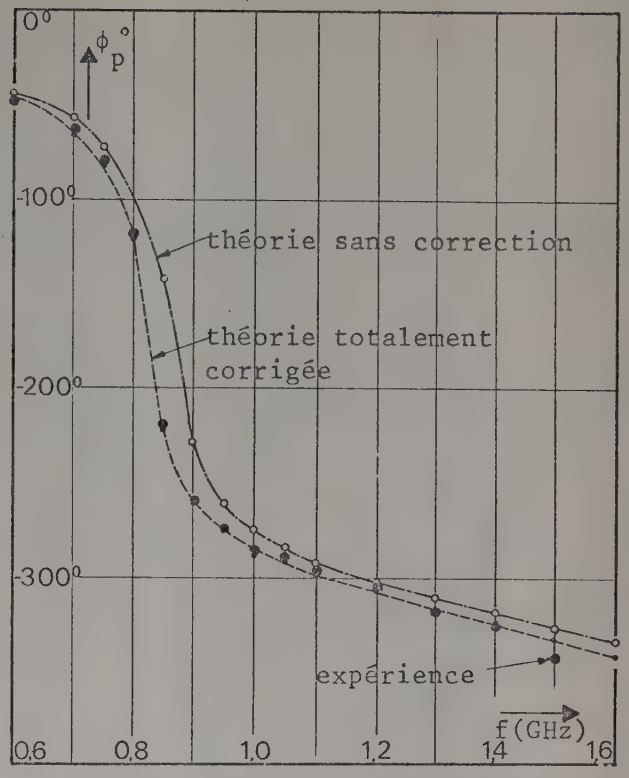


Application des lois de correction au calcul des admittances propre et de couplage entre deux doublets repliés distants de d. a = 2,5 mm ; b = 18 mm ; c = 1,5 mm h = 75 mm.

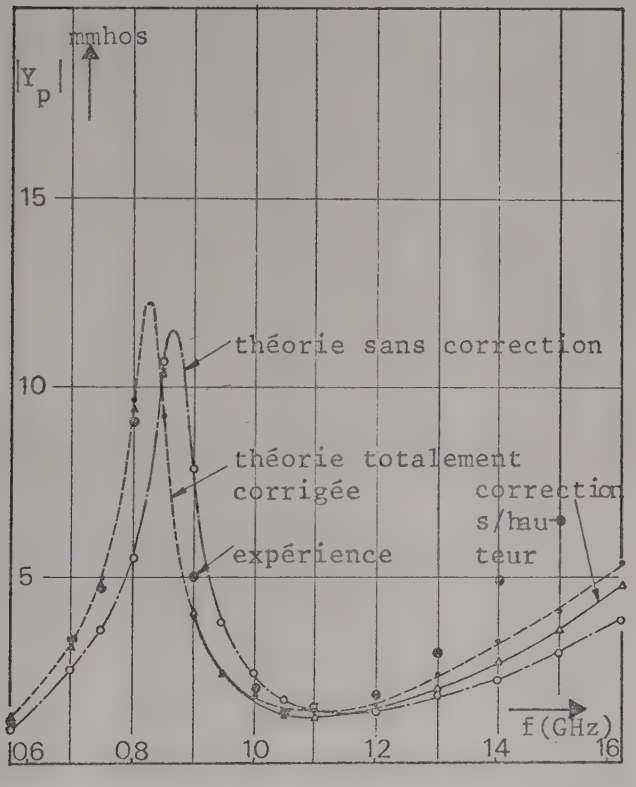
- ● expérience
- —o— théorie sans correction
- -•- théorie totalement corrigée
- -△- correction sur la hauteur seulement dans les termes de couplage

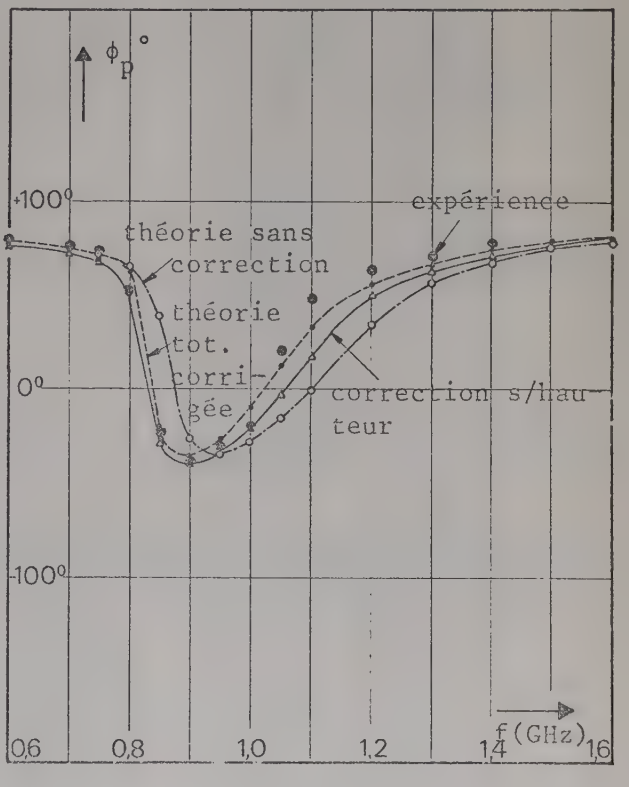
Fig. VII-b





d = 6 cm





Application des lois de correction au calcul des admittances propre et de couplage entre deux doublets repliés distants de d. a = 2,5 mm ; b = 18 mm ; c = 1,5 mm h = 75 mm.

- expérience
- théorie sans correction
- théorie totalement corrigée
- correction sur la hauteur seulement dans les termes de couplage

Fig. VII-b

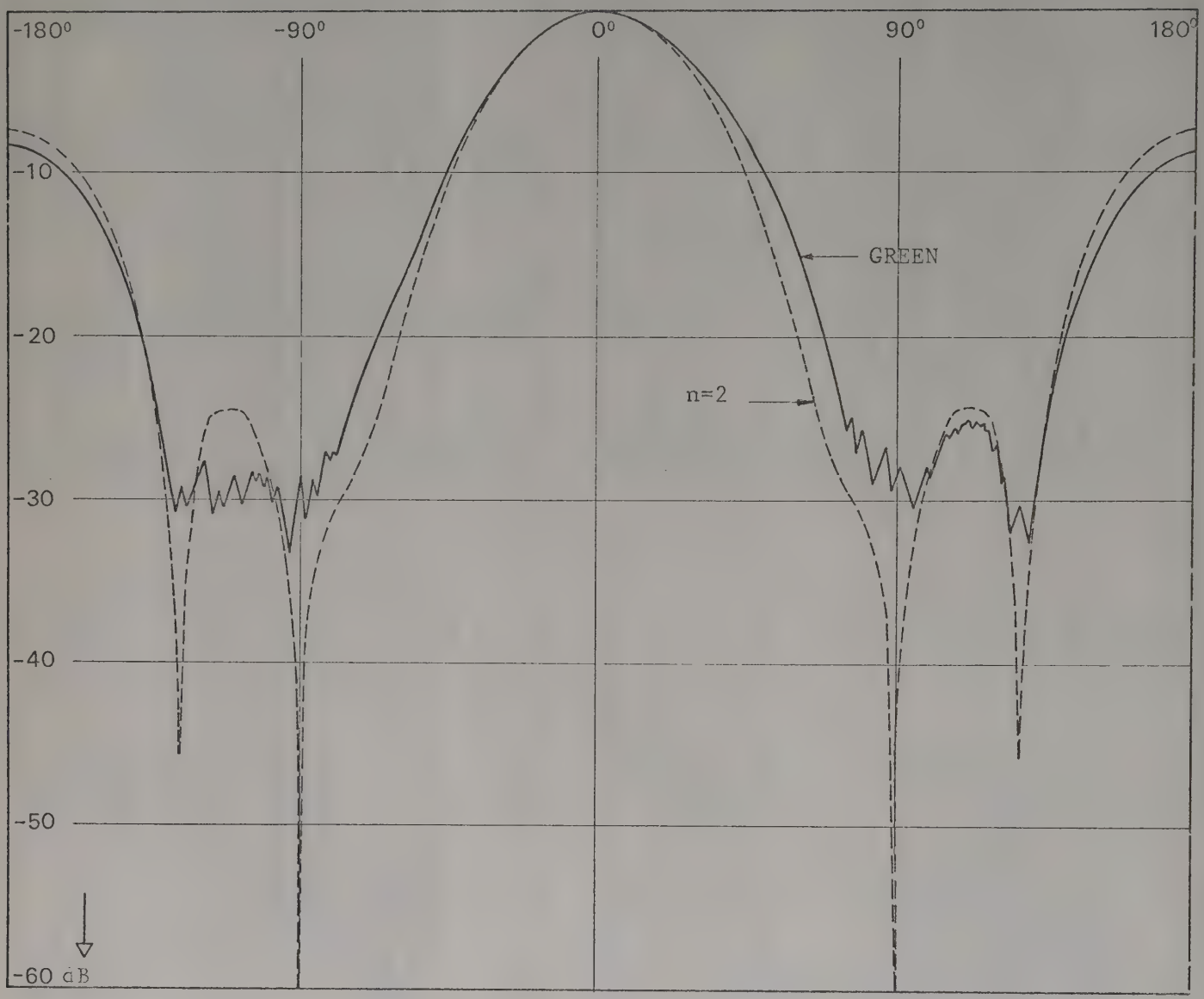


Diagramme de rayonnement dans le plan E d'une antenne YAGI à 4 éléments (1 réflecteur + 1 doublet alimenté + 2 directeurs).

—— Mesures de GREEN

--- Calcul pour n = 2

Fig. VIII-a

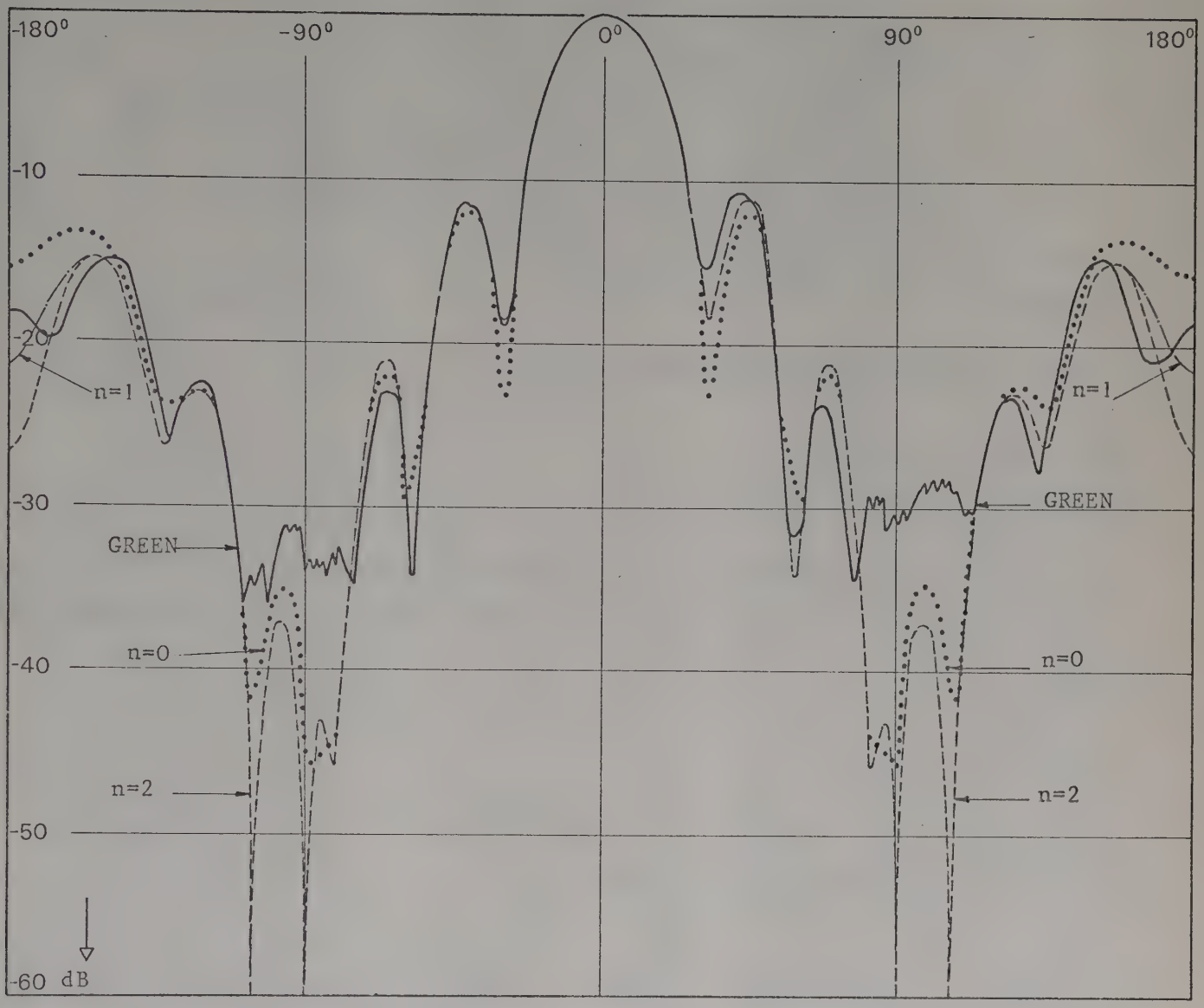


Diagramme de rayonnement dans le plan E d'une antenne YAGI à 10 éléments (1 réflecteur + 1 doublet alimenté + 8 directeurs).

—— Mesures de GREEN

•••• n = 0

—— n = 1

---- n = 2

Fig. VIII-b

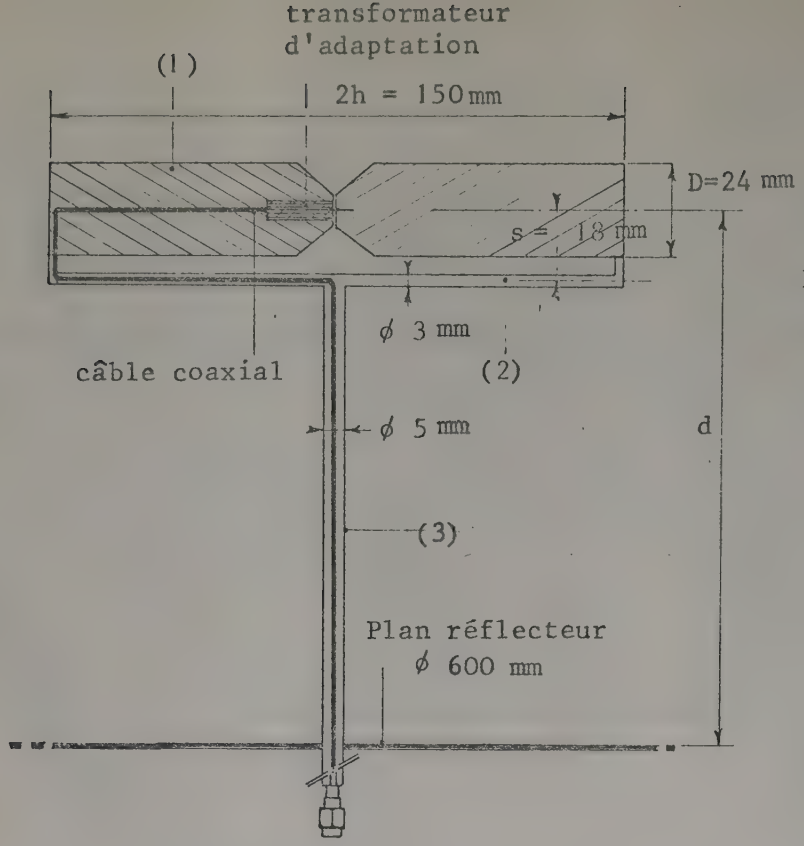


Fig. IX-a

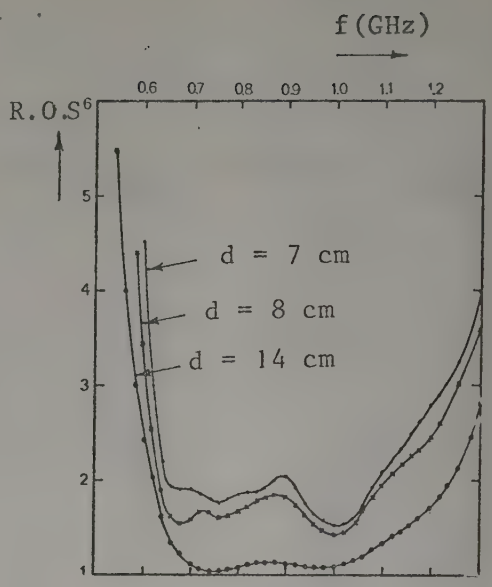
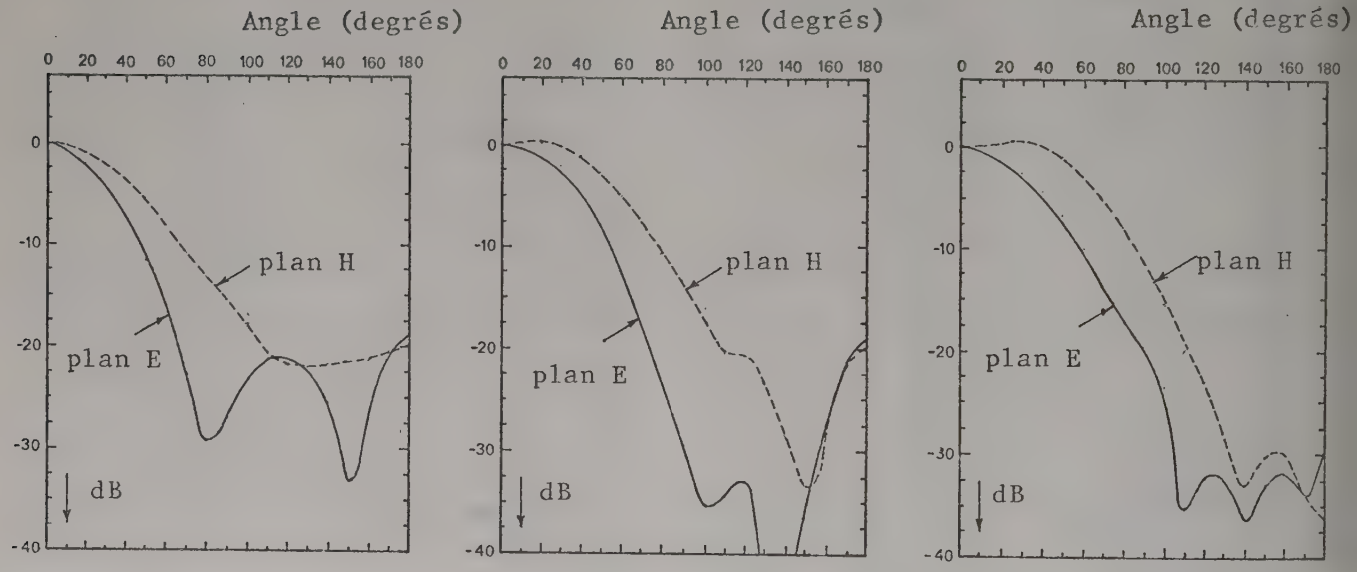


Fig. IX-b



f = 0,6 GHz

f = 0,9 GHz

f = 1,2 GHz

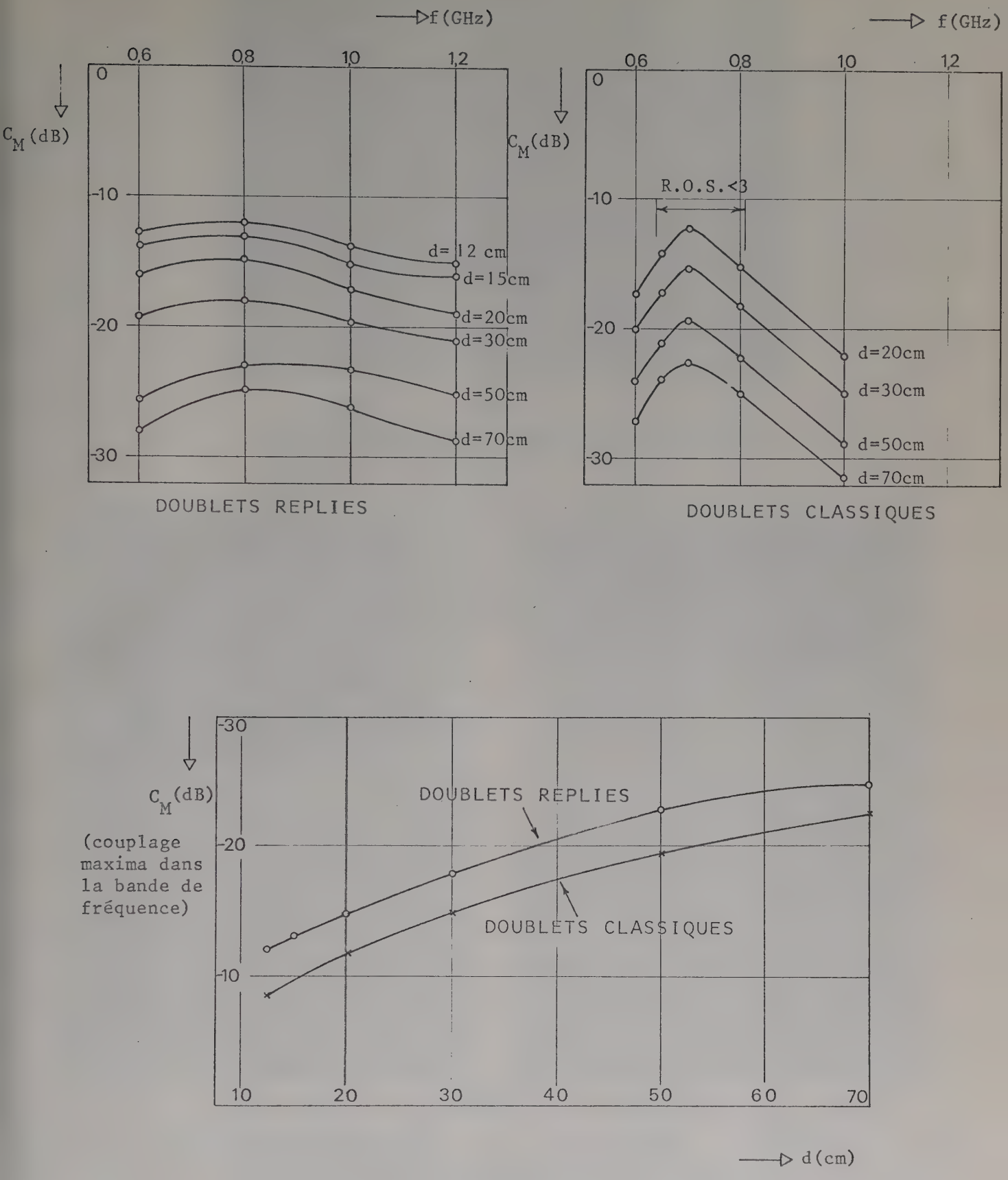
Fig. IX-c

Fig. IX-a Alimentation du doublet symétrique replié avec réflecteur.

Fig. IX-b Rapport d'ondes stationnaires de l'impédance de rayonnement de l'antenne rapportée à 50 Ohms pour plusieurs distances d au réflecteur.

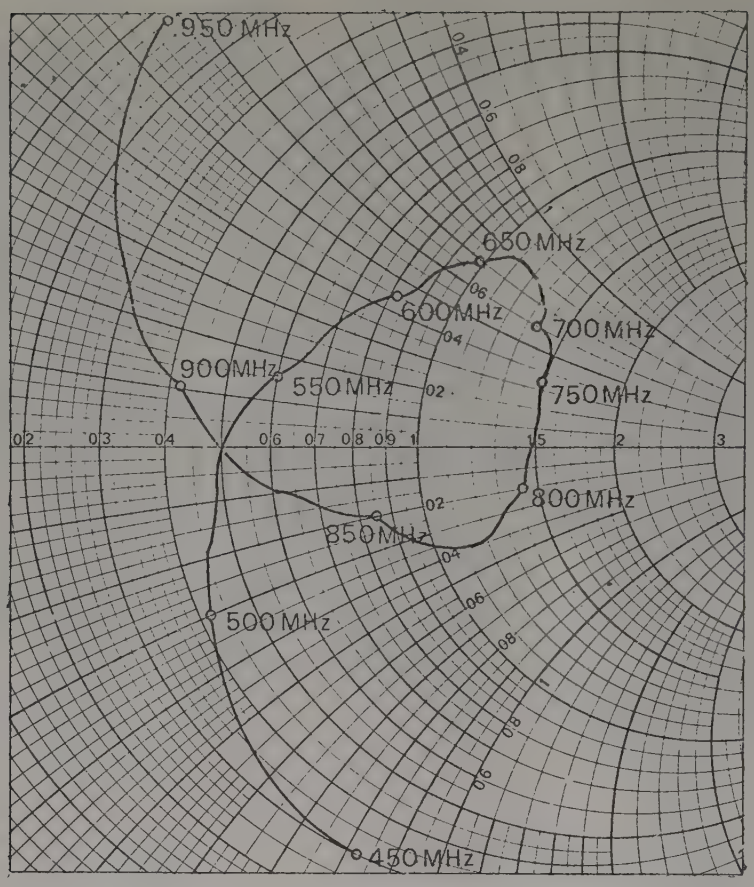
Fig. IX-c Diagrammes de rayonnement du doublet symétrique replié, avec réflecteur aux fréquences inférieure, moyenne et supérieure de la bande.
(Les dimensions de l'antenne sont données (A) avec d = 7 cm).

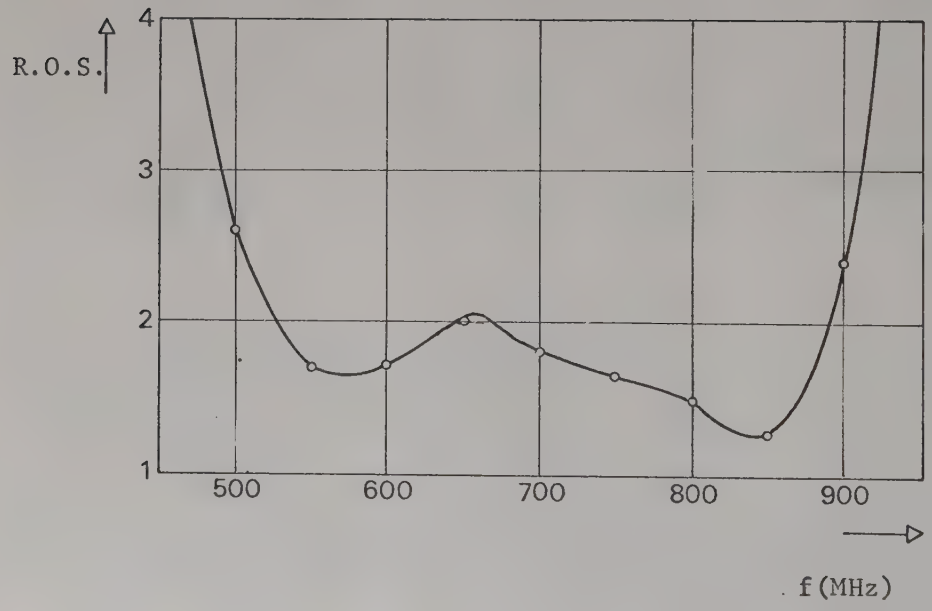
Fig. IX



Comparaison du couplage mesuré entre deux doublets symétriques repliés à large bande (conformes à celui de la figure IX mais sans plan réflecteur) et du couplage théorique entre deux doublets symétriques classiques ($\Omega = 8$). Les doublets sont parallèles et distants de d.

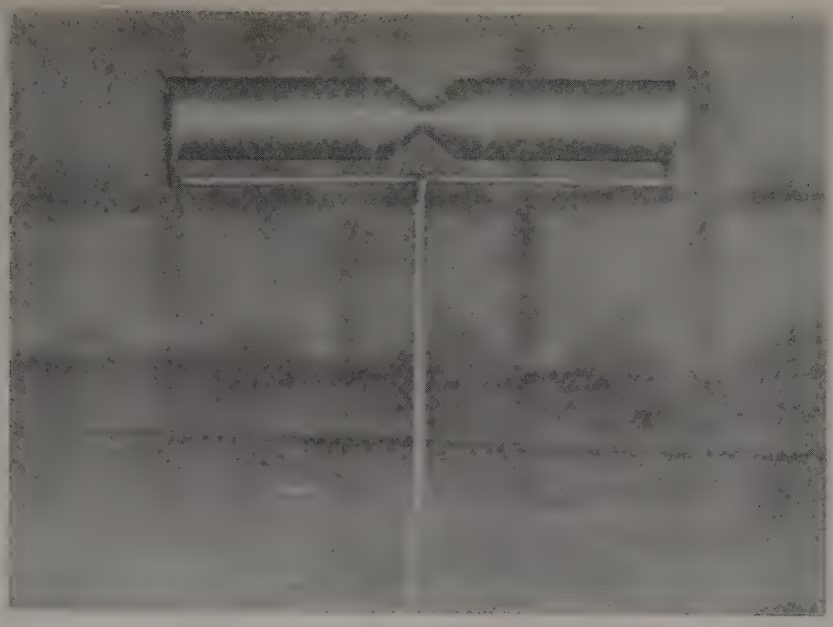
Fig. X



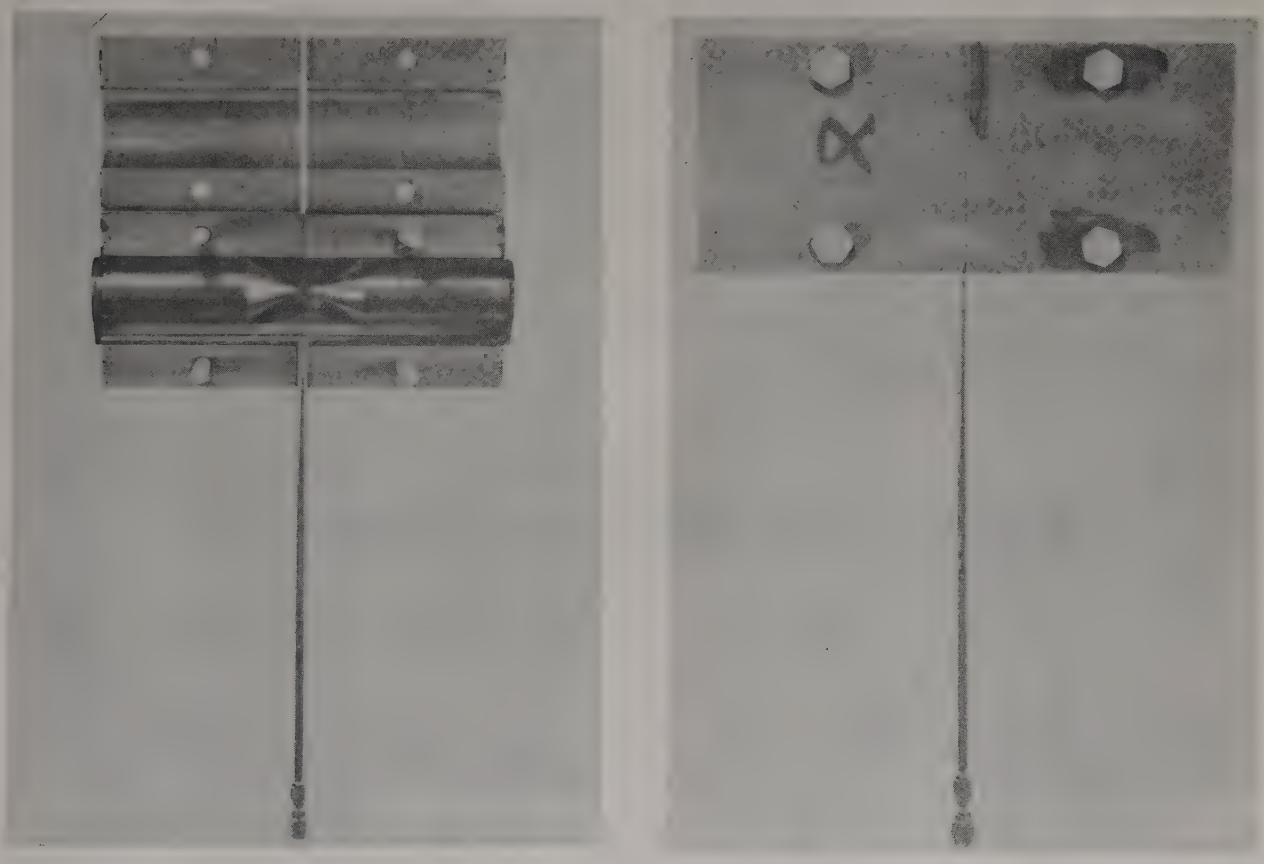


Impédance d'entrée d'un doublet replié symétrique à large bande immergé dans un diélectrique.

Fig. XI-a



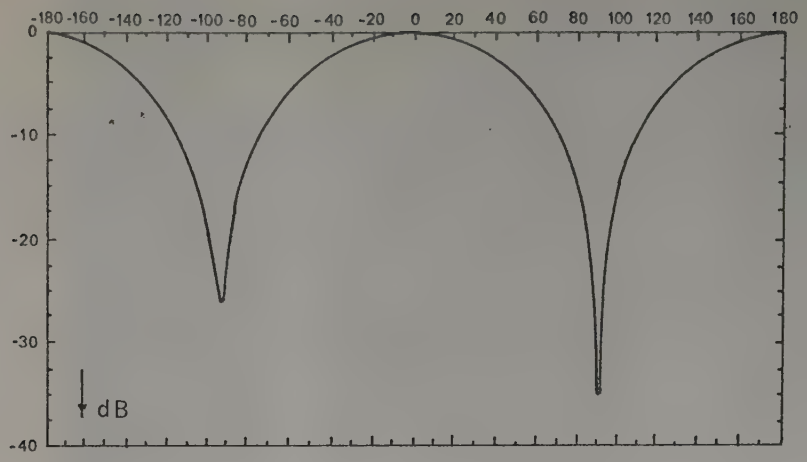
DOUBLET SYMETRIQUE REPLIE A LARGE BANDE



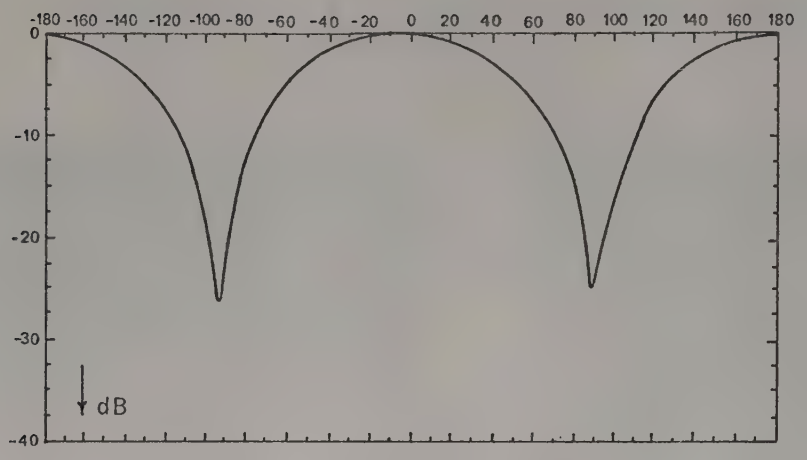
DOUBLET SYMETRIQUE REPLIE A LARGE BANDE
IMMERGE DANS UN DIELECTRIQUE

Comparaison des deux doublets.
Il faut surtout comparer les formes géométriques au voisinage de l'alimentation.

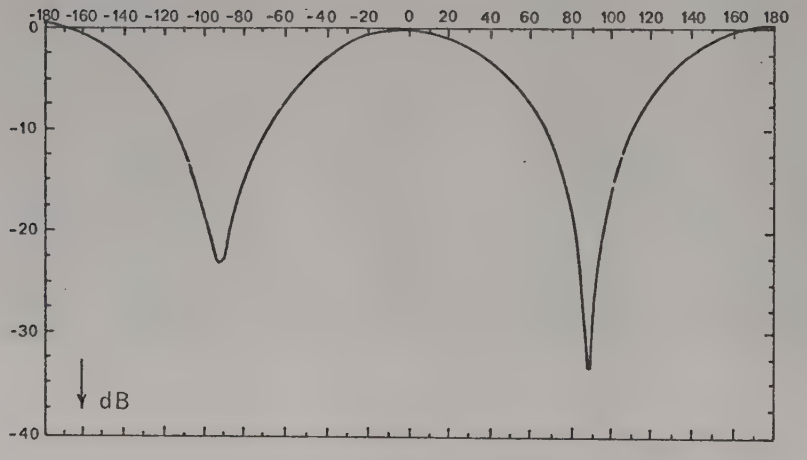
Fig. XII



f = 500 MHz



f = 700 MHz



f = 900 MHz

Diagrammes de rayonnement mesurés dans le plan E du doublet replié symétrique à large bande immergé dans un diélectrique

Fig. XI-b

V U

Le Président de la Thèse

G. DUBOST

V U

Le Directeur de Thèse

G. DUBOST

VU et APPROUVE

RENNES, le 5 Mars 1973

Le Directeur de l'U.E.R.

"Structure et Propriétés de la Matière"

D. GRANDJEAN

VU et PERMIS D'IMPRIMER N° 112 C

RENNES, le 6 Mars 1973

Le Président de l'Université de Rennes

C. CHAMPAUD